

# Máquinas de Turing

## Divisor de Números Inteiros

Junho/2008

Prof. Carlos Henrique Ribeiro

Carlos Breviglieri Jr  
Ricardo Cezar Rodrigues  
Thiago Pena Kinoshita  
Wagner Silva  
Wellingtonn Vergilio Fortes

<b>1. Especificação do Problema</b>	<b>3</b>
Enunciado	3
Números Inteiros	3
Entrada	3
Saída	4
<b>2. Idéia da Solução</b>	<b>4</b>
<b>3. Visão Geral da Implementação</b>	<b>5</b>
i. Cadeia Inicial	5
ii. Separação do quociente	5
iii. Determinação do sinal do quociente	5
iv. Cálculo da divisão	5
v. Limpeza dos campos não-necessários na resposta	6
vi. Delimitação da cadeia de saída	6
vii. Deslocamento da resposta à esquerda	6
viii. Cadeia Final	6
<b>4. Outros exemplos – visão geral</b>	<b>7</b>
Exemplo 1: $7/3$	7
Exemplo 2: $7/0$	7
Exemplo 3: $4/2$	7
Exemplo 4: $-7/3$	8
Exemplo 5: $2/-3$	8
Exemplo 6: $-2/3$	8
<b>5. Diagrama de Transições Completo</b>	<b>9</b>
<b>6. Descrição das Transições</b>	<b>10</b>
Diagrama de Transições com Funções	11
Função_1: Escreve símbolo separador '1' ao final da cadeia	11
Função_1: Escreve símbolo separador '1' ao final da cadeia	12
Função_2: Determina o sinal do quociente	13
Função_9: Substitui cada algarismo do denominador por 'X' e do numerador por 'Y'	15
Função_3: Divisão com Numerador Zero	17
Função_4: Acrescenta uma unidade ao quociente (Escreve '0' no final da cadeia)	18
Função_5: Desfaz substituições de 'X' e 'Y'	19
Função_6: Apaga o denominador e verifica se o quociente é zero	21
Função_7: Trata a Divisão por zero	23
Função_8: Acrescenta '\$' ao final e Desloca à Esquerda	24
<b>7. Execução Passo-a-passo</b>	<b>27</b>
7.1. $3/2$	27
7.2. $4/-2$	31
7.3. $0/3$	38
7.4. $0/0$	40
7.5. $-4/3$	42
7.6. $-2/-2$	49
7.7. $--3/2$	54
<b>8. Outros Resultados</b>	<b>55</b>
<b>9. Conclusão</b>	<b>56</b>

## 1. Especificação do Problema

### **Enunciado**

Projetar e implementar máquina de Turing para executar divisão de números **inteiros**.

**Entrada:** x, y **inteiros**, separados por um símbolo específico.

**Saída:** parte inteira de x/y e resto de x/y, separados por um símbolo específico.

### **Números Inteiros**

A representação unária é utilizada para expressar os números inteiros, conforme a tabela a seguir:

Decimal	Unária
4	0000
3	000
2	00
1	0
0	@
-1	-0
-2	-00
-3	-000
-4	-0000

Os números negativos são precedidos pelo sinal '-' e os positivos não possuem sinal (não há sinal '+'). O número zero possui um símbolo especial '@'.

### **Entrada**

A entrada possui o seguinte formato:

<Delimitador de cadeia><Denominador><Separador><Numerador>BBBBB...

Onde:

<Delimitador de cadeia> = \$

<Separador> = 1

<Numerador> e <Denominador> são números inteiros representados na base unária.

Exemplos:

\$00010000000BBBBBBB	7/3
\$001-0000BBBBBBBBBBB	-4/2
\$-0000100000BBBBBBB	5/-4
\$0001@BBBBBBBBBBBBBBB	0/3

### Saída

A saída possui o seguinte formato:

<Delimitador de cadeia><Resto><Separador><Quociente><Delimitador de cadeia>

Onde:

<Delimitador de cadeia> = \$

<Separador> = 1

<Resto> e <Quociente> são números inteiros representados na base unária.

No caso de divisão por zero, o <Quociente> assume o valor especial '#’.

Exemplos:

\$0100\$	Resto=1	Quociente=2
\$@1-00\$	Resto=0	Quociente=-2
\$01-0\$	Resto=1	Quociente=-1
\$0001@\$	Resto=3	Quociente=0

## 2. Idéia da Solução

A MT projetada usa o princípio de subtrair o denominador do numerador tantas vezes quantas forem possíveis. O quociente é o número de subtrações realizadas. O resto é o valor que sobrar após a última subtração. Assim, temos:

**Exemplo: 11 / 2**

11 - 2 = 9	} 5 subtrações: Quociente = 5
9 - 2 = 7	
7 - 2 = 5	
5 - 2 = 3	
3 - 2 = 1	
→ Resto = 1	

### 3. Visão Geral da Implementação

A MT projetada para calcular a divisão de números inteiros possui basicamente seis etapas:

- Separação do campo do quociente
- Determinação do sinal do quociente
- Cálculo da divisão
- Limpeza dos campos não-necessários na resposta
- Delimitação da cadeia de saída
- Deslocamento da resposta à esquerda

**Exemplo: -7 / 2**

#### i. Cadeia Inicial

\$001-0000000BBBBBBBB

A cadeia de entrada possui basicamente dois campos, o denominador ('2' neste exemplo) e o numerador ('-7' neste exemplo), separados pelo símbolo '1'. O primeiro símbolo da cadeia de entrada é o símbolo especial '\$'.

#### ii. Separação do quociente

\$001-00000001BBBBBBBB

Nesta etapa, o primeiro 'B' é substituído pelo símbolo separador '1'. Com isso, cria-se um terceiro campo, onde será escrito o quociente.

#### iii. Determinação do sinal do quociente

\$001-00000001-BBBBBBB

O sinal do quociente é colocado no primeiro campo, caso um dos números de entrada seja positivo e o outro negativo. Caso contrário, não escreve nada.

#### iv. Cálculo da divisão

\$001-YYYYYY01-000BBBB

Durante o cálculo da divisão, os algarismos do denominador e numerador são substituídos por símbolos auxiliares 'X' e 'Y'. O quociente é colocado ao final da cadeia, no terceiro campo. O resto é a parte do numerador que não foi consumida (transformada em 'Y') pelo processo da divisão.

O cálculo da divisão propriamente dita é feita usando a seguinte lógica:

- Marque cada algarismo do denominador (com um 'X') e, para cada um, retire um algarismo do denominador (marcando-o com um 'Y').
- Quando todos os algarismos do denominador estiverem marcados, acrescente uma unidade ao quociente.

- Retire a marcação do denominador e repita o processo, até que o numerador seja menor do que o denominador, ou seja, até que não haja mais algarismos suficientes no numerador para serem marcados. O resto é a quantidade de unidades que sobram no numerador.

**v. Limpeza dos campos não-necessários na resposta**

\$~~BBB~~-~~BBBBBB~~01-000~~BBBB~~

O denominador, o primeiro símbolo separador '1' e a parte consumida do numerador não fazem parte da resposta. Por isso, são apagados.

**vi. Delimitação da cadeia de saída**

\$BBB-~~BBBBBB~~01-000\$~~BBB~~

Ao final da cadeia, é inserido o símbolo especial '\$', que delimita o final da resposta.

**vii. Deslocamento da resposta à esquerda**

\$-01-000\$~~BBBBBBBBBBBBBB~~

A cadeia é deslocada para a esquerda, de modo a ficar no começo da fita.

**viii. Cadeia Final**

\$-01000\$~~BBBBBBBBBBBBBB~~

A cadeia final fica toda à esquerda, delimitada pelo símbolo '\$' no início e no final. Primeiro aparece o resto ('-1' neste exemplo) e depois o quociente ('-3' neste exemplo).

#### 4. Outros exemplos – visão geral

A seguir, são apresentados alguns exemplos com as macro-operações e uma descrição. Os exemplos incluem casos simples como o já mostrado e também alguns casos especiais, como divisão por zero, divisão exata (que requer a inclusão do zero no campo de resto) e divisão com quociente zero (que requer a inclusão do zero no campo de quociente).

##### Exemplo 1: 7/3

Entrada: '\$' denominador '1' numerador BBB...

\$00010000000BBB...	0. Entrada
\$000100000001BBB...	1. Coloca '1' no final da entrada, ou seja, no lugar do primeiro 'B'.
\$XXX1YYY00001BBB...	2. A cada algarismo do denominador, substitui por 'X' e o numerador substitui por 'Y'.
\$XXX1YYY000010BB...	3. Quando terminar, escreve um '0' no final, ou seja, no lugar do primeiro 'B'.
\$0001YYY000010BB...	4. Volta os 'X' para '0'
\$0001YYY0000100B...	5. Refaz os passos 2,3 e 4.
\$XX01YYYYYY100B...	6. Ao tentar novamente o passo 2, não vai encontrar '0' para substituir por 'Y'.
\$001YYYYYY0100B...	7. Volta os últimos 'Y' e os 'X' para '0'.
\$BBBBBBBBB0100B...	8. Escreve 'B' sobre os algarismos desnecessários. Resposta: resto=1 e quociente=2.
\$BBBBBBBBB0100\$...	9. Escreve '\$' no final da cadeia.
\$0100\$BBBBBBBBB...	10. Desloca o resultado para a esquerda.

##### Exemplo 2: 7/0

\$@10000000BBB...	0. Entrada
\$@100000001BBB...	1. Escreve '1' no final.
\$B100000001BBB...	2. Apaga '@'
\$BB00000001BBB...	3. Apaga o primeiro '1'
\$BB00000001#BB...	4. Escreve '#' no quociente
\$BB00000001#\$B...	5. Escreve '\$' no final da cadeia
\$00000001#\$BBB...	6. Desloca o resultado para a esquerda.

##### Exemplo 3: 4/2

\$0010000BBBBBB...	0. Entrada
\$00100001BBBBBB...	1. Escreve '1' no final.
\$XX1YY001BBBBBB...	2. A cada algarismo do denominador, substitui por 'X' e o numerador substitui por 'Y'.
\$XX1YY0010BBB...	3. Quando terminar, escreve um '0' no final, ou seja, no lugar do primeiro 'B'.
\$001YY0010BBB...	4. Volta os 'X' para '0'
\$XX1YY00100BB...	5. Refaz os passos 2,3 e 4.
\$X01YYYY100BB...	6. Ao tentar novamente o passo 2, não vai encontrar '0' para substituir por 'Y'.
\$001YYYY100BB...	7. Volta os últimos 'Y' e os 'X' para '0'.
\$BBBBBB100BB...	8. Escreve 'B' sobre os algarismos desnecessários.
\$BBBBBB@100BB...	9. Escreve '@' no Resto.
\$BBBBBB@100\$B...	10. Escreve '\$' no final da cadeia.
\$@100\$BBBBBBB...	11. Desloca o resultado para a esquerda.

### Exemplo 4: -7/3

\$0001-0000000BBBBB...	0. Entrada
\$0001-00000001BBBB...	1. Escreve '1' no final.
\$0001-00000001-BBB...	2. Escreve o sinal do quociente.
\$0001-YYYYYY01-00B...	3. Faz a divisão como no exemplo exemplo 1.
\$BBBB-BBBBBB01-00B...	4. Apaga o denominador, o separador e a parte exata do numerador.
\$BBBB-BBBBBB01-00\$...	5. Escreve '\$' no final.
\$-01-00\$BBBBBBBBBB...	6. Desloca o resultado para a esquerda.

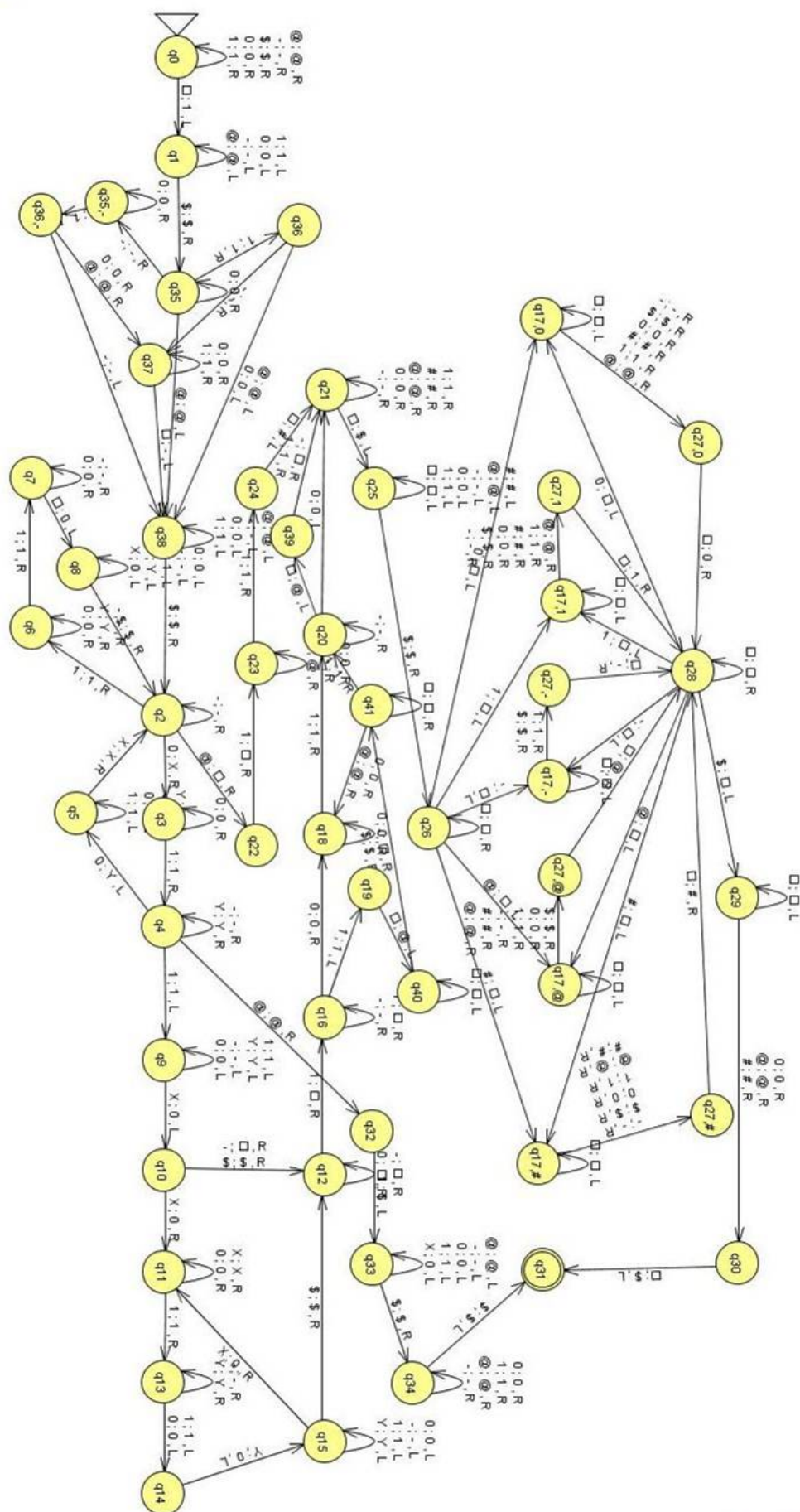
### Exemplo 5: 2/-3

\$-000100BBBBBBBBBB...	0. Entrada
\$-0001001BBBBBBBBBB...	1. Escreve '1' no final.
\$-0001001-BBBBBBBB...	2. Escreve o sinal do quociente.
\$-XX01YY1-BBBBBBBB...	3. Substitui denominador por 'X' e numerador por 'Y'.
\$-XX1YY1-BBBBBBBB...	4. Não encontra '0' para substituir por 'Y'. (mesma situação do exemplo 1 passo 6, porém ainda não escreveu nenhum algarismo no final, ou seja, o quociente é zero!)
\$-0001001-BBBBBBBB...	5. Volta os últimos 'Y' e os 'X' para '0'. (passo 7 do exemplo 1)
\$-0001001@BBBBBBBB...	6. Escreve zero no final (sobrescreve o sinal).
\$BBBBB001@BBBBBBBB...	7. Apaga o denominador e o separador. (Não há 'Y' para apagar)
\$BBBBB001@\$BBBBBBB...	8. Escreve '\$' no final.
\$001@\$BBBBBBBBBBBB...	9. Desloca o resultado para a esquerda.

### Exemplo 6: -2/3

\$0001-00BBBBBBBBBB...	0. Entrada
\$0001-001BBBBBBBBBB...	1. Escreve '1' no final.
\$0001-001-BBBBBBBB...	2. Escreve o sinal do quociente.
\$XX01-YY1-BBBBBBBB...	3. Substitui denominador por 'X' e numerador por 'Y'.
\$XX1YY1-BBBBBBBB...	4. Não encontra '0' para substituir por 'Y'. (mesma situação do exemplo 1 passo 6, porém ainda não escreveu nenhum algarismo no final, ou seja, o quociente é zero!)
\$0001-001-BBBBBBBB...	5. Volta os últimos 'Y' e os 'X' para '0'. (passo 7 do exemplo 1)
\$000-001-@BBBBBBBB...	6. Escreve zero no final (sobrescreve o sinal).
\$BBBB-001@BBBBBBBB...	7. Apaga o denominador e o separador. (Não há 'Y' para apagar)
\$BBBB-001@\$BBBBBBB...	8. Escreve '\$' no final.
\$-001@\$BBBBBBBBBBBB...	9. Desloca o resultado para a esquerda.

## 5. Diagrama de Transições Completo



## 6. Descrição das Transições

$\Sigma = \{\$, 0, 1, -, @\}$

$\Gamma = \{\$, 0, 1, -, @, B, \#, X, Y\}$

$\$$ : delimitador da cadeia

1: separador

-: sinal negativo

@: zero

B: *blank*

#: divisão por zero

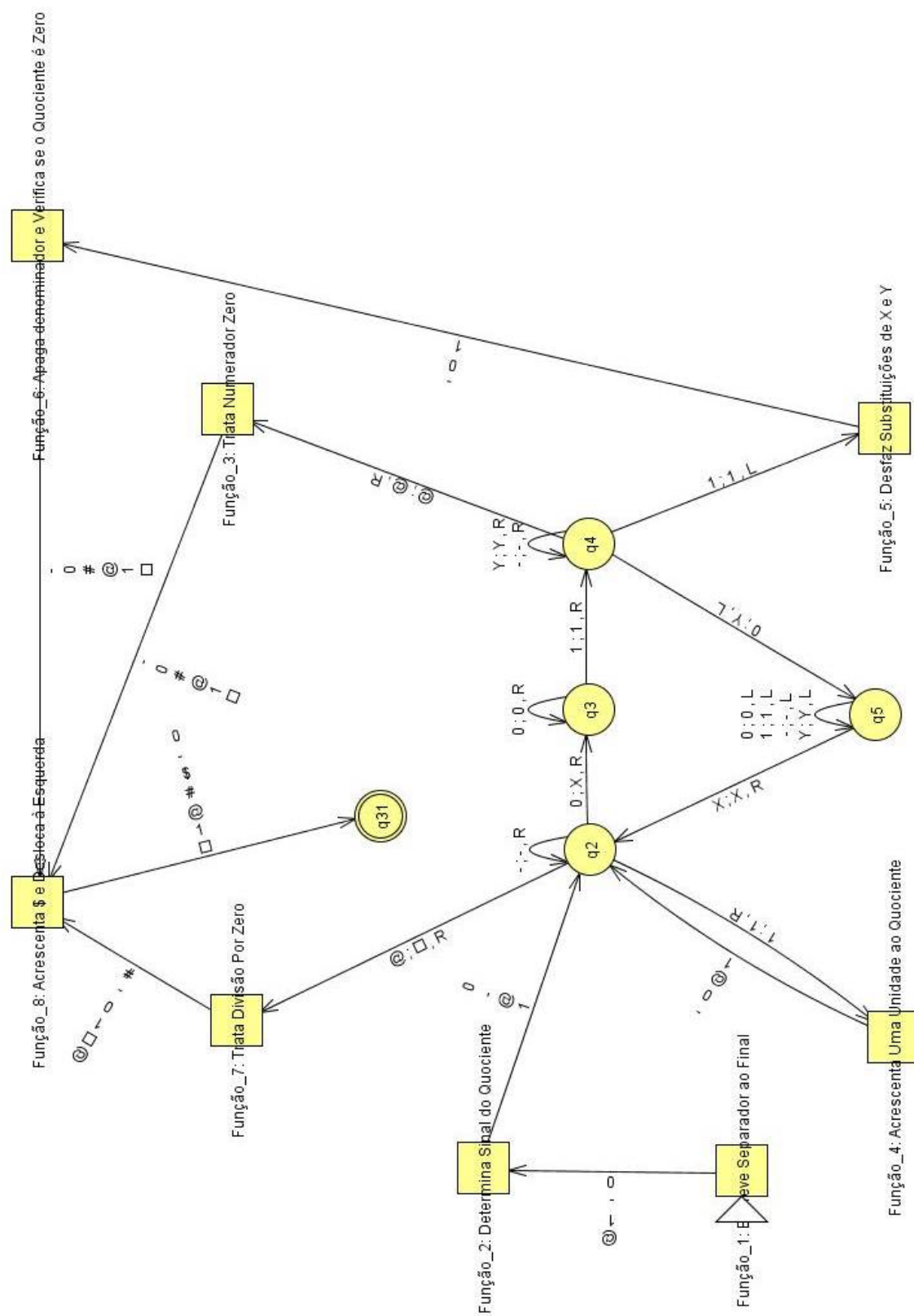
X: símbolo auxiliar que substitui os algarismos do denominador.

Y: símbolo auxiliar que substitui os algarismos do numerador.

Observação: o software JFlap possui um símbolo default para *blank*, que é o '□'. Dessa forma, na figuras retiradas do JFlap, 'B' será sempre substituído por '□'.

O diagrama completo mostrado no item anterior é bastante poluído. Para facilitar o entendimento e a visualização, utiliza-se o recurso de blocos, que permite criar sub-rotinas e utilizá-las dentro de um contexto maior. A seguir, são apresentadas as descrições das transições juntamente com um diagrama de cada função, a fim de facilitar a compreensão do funcionamento da máquina.

## Diagrama de Transições com Funções



### Função\_1: Escreve símbolo separador '1' ao final da cadeia

Em **q0**, lendo '-', '\$', '@', '0' ou '1', move para a direita.

$\delta(q0, -) = (q0, -, R)$

$\delta(q0, \$) = (q0, \$, R)$

$\delta(q0, @) = (q0, @, R)$

$\delta(q0, 0) = (q0, 0, R)$

$\delta(q0, 1) = (q0, 1, R)$

Lendo 'B', escreve '1', vai para q1 e move para a esquerda. (Chegou ao final da cadeia de entrada)

$\delta(q0, B) = (q1, 1, L)$

Em **q1**, lendo '-', '@', '0' ou '1', move para a esquerda.

(Volta para o início)

$\delta(q1, -) = (q1, -, L)$

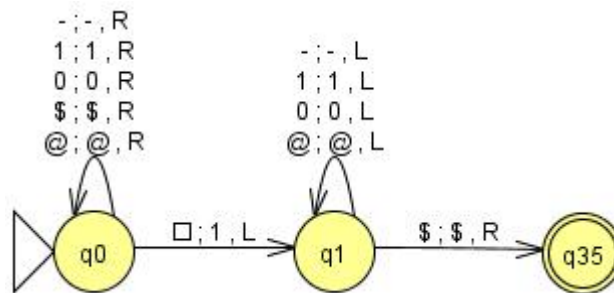
$\delta(q1, @) = (q1, @, L)$

$\delta(q1, 0) = (q1, 0, L)$

$\delta(q1, 1) = (q1, 1, L)$

Lendo '\$', vai para q35 e move para a direita. (Chegou ao início)

$\delta(q1, \$) = (q35, \$, R)$



## Função\_2: Determina o sinal do quociente

Em **q35**, lendo '0', ou '@', move para a direita.

(denominador positivo)

$\delta(q35,0)=(q35,0,R)$

Lendo '1', vai para q36 e move para a direita.

(denominador positivo, vai começar a ler o numerador)

$\delta(q35,1)=(q36,1,R)$

Lendo '-', vai para [q35,-] e move para a direita.

(denominador negativo)

$\delta(q35,-)=(q35,-,R)$

Lendo '@', vai para q38 e move para a esquerda

(denominador zero, não precisa escrever sinal)

$\delta(q35,@)=(q38,@,L)$

Em **[q35,-]**, lendo '0' move para a direita. (denominador negativo, ainda lendo denominador)

$\delta([q35,-],0)=([q35,-],0,R)$

Lendo '1', vai para [q36,-] e move para a direita.

(denominador negativo, vai começar a ler o numerador)

$\delta([q35,-],1)=([q36,-],1,R)$

Em **q36**, lendo '0' ou '@', vai para q38 e move para a esquerda. (numerador também positivo, quociente positivo, não precisa escrever sinal, volta para o começo)

$\delta(q36,0)=(q38,0,L)$

$\delta(q36,@)=(q38,@,L)$

Lendo '-', vai para q37 e move para a direita

(numerador negativo, quociente negativo, vai procurar o final)

$\delta(q36,-)=(q37,-,R)$

Em **[q36,-]**, lendo '-' vai para q38 e move para a esquerda. (numerador também negativo, quociente positivo, não precisa escrever sinal, volta para o começo)

$\delta([q36,-],-)=(q38,-,L)$

Lendo '0' ou '@', vai para q37 e move para a direita

(numerador positivo, quociente negativo, vai procurar o final)

$\delta([q36,-],0)=(q37,0,R)$

$\delta([q36,-],@)=(q37,@,R)$

Em **q37**, lendo '0' ou '1', vai para a direita. (procura o final)

$\delta(q37,0)=(q37,0,R)$

$\delta(q37,1)=(q37,1,R)$

Lendo 'B', escreve '-', vai para q1 e move para a esquerda. (escreve o sinal do quociente e volta para o começo)

$\delta(q37,B)=(q38,-,L)$

Em **q38**, lendo '-', '@', '0' ou '1', move para a esquerda.  
(Volta para o início)

$\delta(q38, -) = (q38, -, L)$

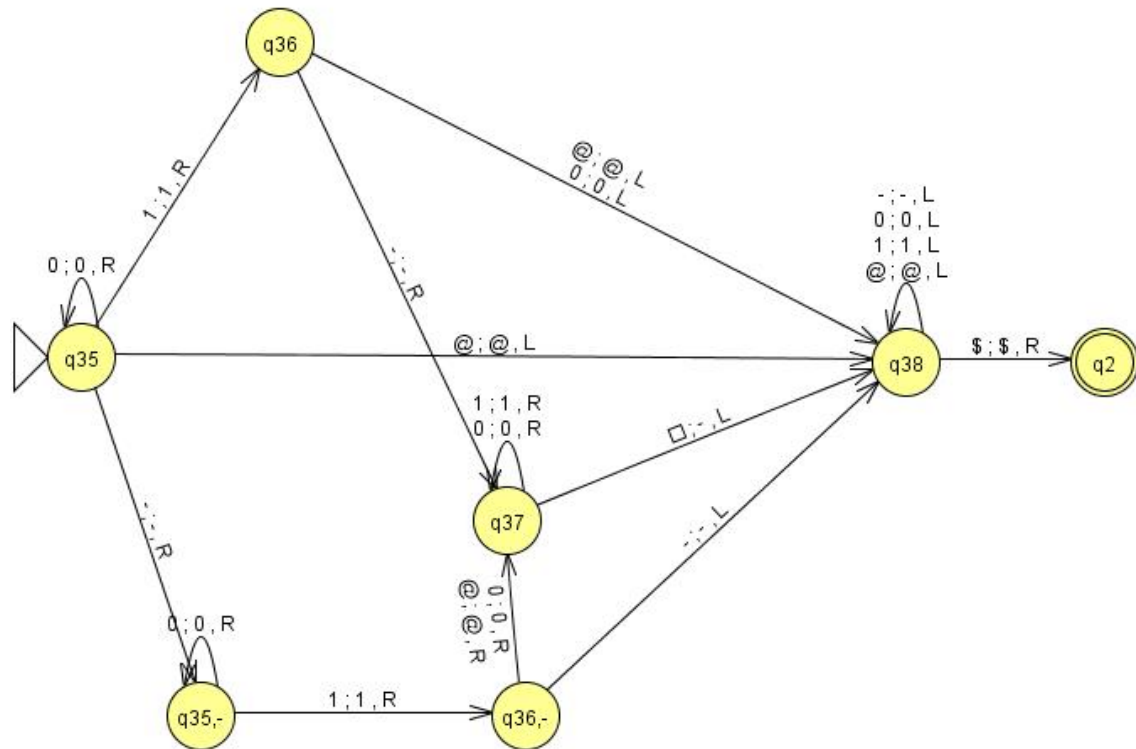
$\delta(q38, @) = (q38, @, L)$

$\delta(q38, 0) = (q38, 0, L)$

$\delta(q38, 1) = (q38, 1, L)$

Lendo '\$', vai para q2 e move para a direita. (Chegou ao início)

$\delta(q38, \$) = (q2, \$, R)$



### Função\_9: Substitui cada algarismo do denominador por 'X' e do numerador por 'Y'

Em **q2**, lendo '0' substitui por 'X', vai para q3 e move para a direita. (Substitui algarismo do denominador '0' por 'X')

$\delta(q2,0)=(q3,X,R)$

Lendo '1', vai para q6 e move para a direita.

(Acabaram os algarismos do denominador)

$\delta(q2,1)=(q6,1,R)$

Lendo '@', escreve 'B', vai para q22 e move para a direita. (divisão por zero)

$\delta(q2,@)=(q22,B,R)$

Lendo '-', move para a direita.

$\delta(q2,-)=(q2,-,R)$  OBS: vai aceitar vários sinais '----'

Em **q3**, lendo '0', move para a direita. (Procurando por algarismos do Numerador)

$\delta(q3,0)=(q3,0,R)$

Lendo '1', vai para q4 e move para a direita. (Próximo símbolo pertence ao numerador)

$\delta(q3,1)=(q4,1,R)$

Em **q4**, lendo '0' substitui por 'Y', vai para q5 e move para a esquerda. (Substitui algarismo do numerador '0' por 'Y')

$\delta(q4,0)=(q5,Y,L)$

Lendo '-', move para a direita.

$\delta(q4,-)=(q4,-,R)$  OBS: vai aceitar vários sinais '----'

Lendo '1', vai para q9 e move para a esquerda.

(Acabaram os algarismos do numerador)

$\delta(q4,1)=(q9,1,L)$

Lendo 'Y', move para a direita. (Procura por algarismo do numerador)

$\delta(q4,Y)=(q4,Y,R)$

Lendo '@', vai para q32 e move para a direita.

(Divisão de 0 como numerador, falta só arrumar a saída.)

$\delta(q4,@)=(q32,@,R)$  OBS: vai aceitar '-0'

Em **q5**, lendo '0', '1', 'Y' ou '-', move para a esquerda. (Volta para o início)

$\delta(q5,0)=(q5,0,L)$

$\delta(q5,1)=(q5,1,L)$

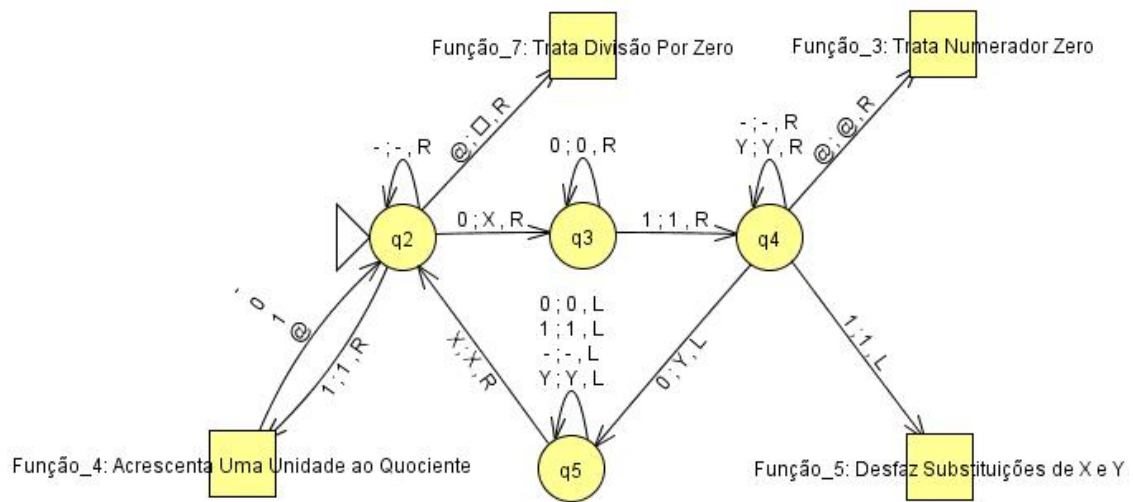
$\delta(q5,Y)=(q5,Y,L)$

$\delta(q5,-)=(q5,-,L)$

Lendo 'X', vai para q2 e move para a direita.

(Encontrou o último algarismo do denominador já substituído, vai para o seguinte).

$\delta(q5,X)=(q2,X,R)$



**Função\_3: Divisão com Numerador Zero**

Em **q32**, lendo '1' substitui por '\$', vai para q33 e move para a esquerda. (Substitui o separador '1' por '\$', pois o denominador não será apagado)

$$\delta(q32, 1) = (q33, \$, L)$$

Em **q33**, lendo '0', '@', '1' ou '-', move para a esquerda.

$$\delta(q33, 0) = (q33, 0, L)$$

$$\delta(q33, 1) = (q33, 1, L)$$

$$\delta(q33, @) = (q33, @, L)$$

$$\delta(q33, -) = (q33, -, L)$$

Lendo 'X', escreve '@' e move para a esquerda. (como o numerador é zero, o resto tem que ser zero)

$$\delta(q33, X) = (q33, @, L)$$

Lendo '\$', vai para q34 e move para a direita. (Chegou ao começo da cadeia, agora vai para o final)

$$\delta(q33, \$) = (q34, \$, R)$$

Em **q34**, lendo '@', move para a direita. (procura o fim da cadeia)

$$\delta(q34, @) = (q34, @, R)$$

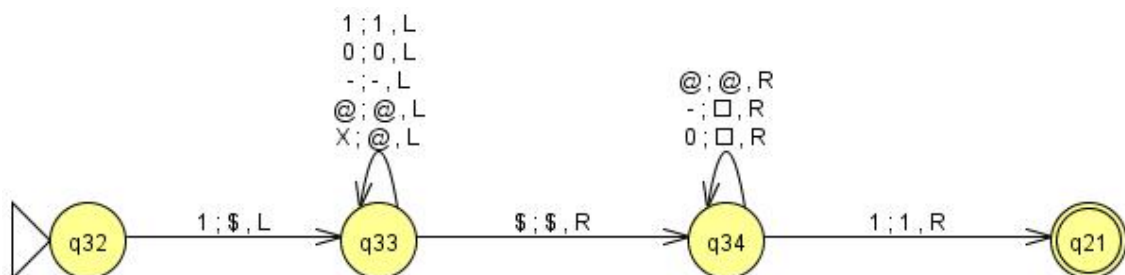
Lendo '0' ou '-', escreve 'B' e move para a direita.

$$\delta(q34, 0) = (q34, B, R)$$

$$\delta(q34, -) = (q34, B, R)$$

Lendo '1', vai para q21 e move para a direita.

$$\delta(q34, 1) = (q21, 1, R)$$



#### Função\_4: Acrescenta uma unidade ao quociente (Escreve '0' no final da cadeia)

Em **q6**, lendo 'Y', '0' ou '-', move para a direita.  
(Procurando o final)

$\delta(q6, Y) = (q6, Y, R)$

$\delta(q6, 0) = (q6, 0, R)$

$\delta(q6, -) = (q6, -, R)$

Lendo '1', vai para q7 e move para a direita.

(Encontrou o fim do numerador, início do quociente)

$\delta(q6, 1) = (q7, 1, R)$

Em **q7**, lendo '0' ou '-', move para a direita. (Procurando o final)

$\delta(q7, 0) = (q7, 0, R)$

$\delta(q7, -) = (q7, -, R)$

Lendo 'B', escreve '0', vai para q8 e move para a esquerda. (Encontrou o final da cadeia, escreve um algarismo do quociente)

$\delta(q7, B) = (q8, 0, L)$

Em **q8**, lendo '0', '1', 'Y' ou '-', move para a esquerda.  
(Voltando para o início)

$\delta(q8, 0) = (q8, 0, L)$

$\delta(q8, 1) = (q8, 1, L)$

$\delta(q8, Y) = (q8, Y, L)$

$\delta(q8, -) = (q8, -, L)$

Lendo 'X', escreve '0' e move para a esquerda.

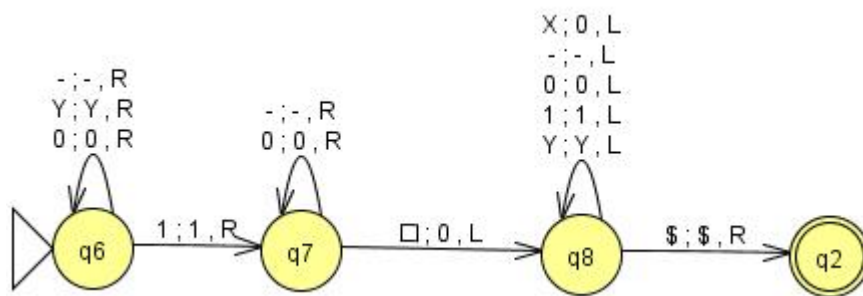
(Restaura 'X' para '0')

$\delta(q8, X) = (q8, 0, L)$

Lendo '\$' vai para q2 e move para a direita.

(Encontrou o início)

$\delta(q8, \$) = (q2, \$, R)$



### Função\_5: Desfaz substituições de 'X' e 'Y'

Em **q9**, lendo '0', '1', 'Y' ou '-', move para a esquerda.  
(Procura 'X')

$\delta(q9,0)=(q9,0,L)$

$\delta(q9,1)=(q9,1,L)$

$\delta(q9,Y)=(q9,Y,L)$

$\delta(q9,-)=(q9,-,L)$

Lendo 'X', escreve '0', vai para q10 e move para a esquerda. (Desfaz a última substituição de '0' por 'X', para restatutar o Resto)

$\delta(q9,X)=(q10,0,L)$

Em **q10**, lendo 'X', escreve '0', vai para q11 e move para a direita. (Substitui 'X' por '0', vai procurar por 'Y')

$\delta(q10,X)=(q11,0,R)$

Lendo '\$', vai para q12 e move para a direita. (Já trocou todos os 'X' e os 'Y' necessários para restaurar o Resto. Começa a apagar o denominador).

$\delta(q10,\$)=(q12,\$,R)$

Lendo '-', vai para q12 e move para a direita. (Já trocou todos os 'X' e os 'Y' necessários para restaurar o Resto. Começa a apagar o denominador).

$\delta(q10,-)=(q12,B,R)$

Em **q11**, lendo 'X' ou '0', move para a direita. (Procurando o numerador)

$\delta(q11,X)=(q11,X,R)$

$\delta(q11,0)=(q11,0,R)$

Lendo '1', vai para q13 e move para a direita. (Começo do numerador)

$\delta(q11,1)=(q13,1,R)$

Em **q13**, lendo 'Y' ou '-', move para a direita.

$\delta(q13,Y)=(q13,Y,R)$

$\delta(q13,-)=(q13,-,R)$

Lendo '0' ou '1', vai para q14 e move para a esquerda. (chegou ao final dos 'Y')

$\delta(q13,0)=(q14,0,L)$

$\delta(q13,1)=(q14,1,L)$

Em **q14**, lendo 'Y', escreve '0', vai para q15 e move para a esquerda. (Substitui 'Y' por 0).

$\delta(q14,Y)=(q15,0,L)$

Em **q15**, lendo 'Y', '1', '0' ou '-', move para a esquerda.

$\delta(q15,Y)=(q15,Y,L)$

$\delta(q15,1)=(q15,1,L)$

$\delta(q15,0)=(q15,0,L)$

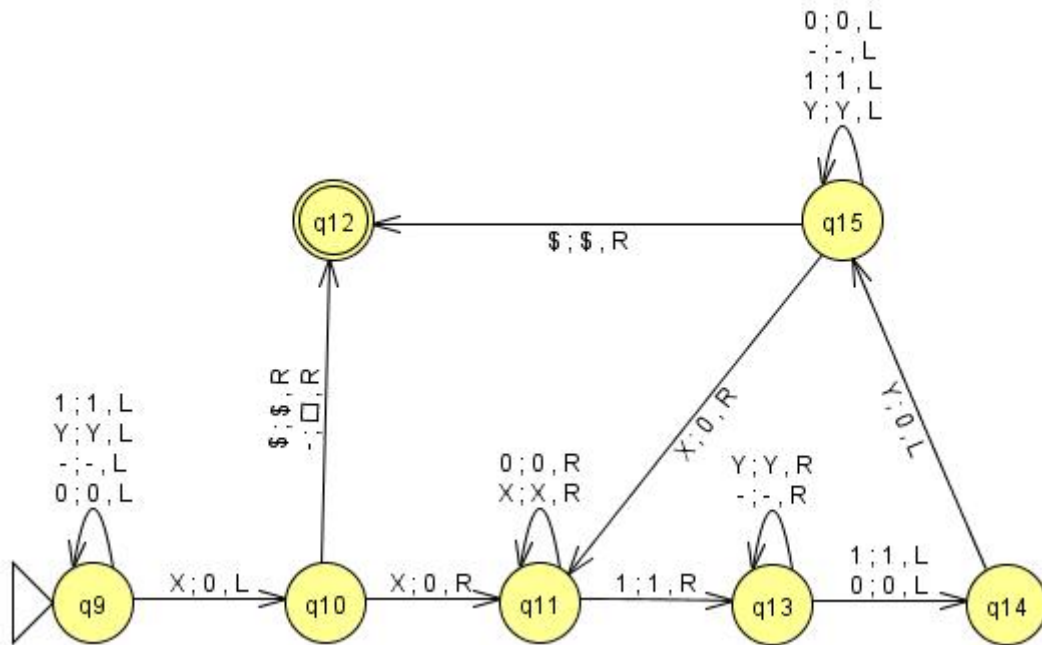
$\delta(q15,-)=(q15,-,L)$

Lendo 'X', escreve '0', vai para q11 e move para a direita. (Substitui 'X' por 0, vai procurar por 'Y').

$$\delta(q_{15}, X) = (q_{11}, 0, R)$$

Lendo '\$', vai para q12 e move para a direita. (Já trocou todos os 'X' e os 'Y' necessários para restaurar o Resto. Começa a apagar o denominador).

$$\delta(q_{15}, \$) = (q_{12}, \$, R)$$



### Função\_6: Apaga o denominador e verifica se o quociente é zero

Em **q12**, lendo '0' ou '-', escreve 'B' e move para a direita. (Apaga o denominador)

$\delta(q12,0)=(q12,B,R)$

$\delta(q12,-)=(q12,B,R)$

Lendo '1', escreve 'B', vai para q16 e move para a direita. (Apaga o separador)

$\delta(q12,1)=(q16,B,R)$

Em **q16**, lendo 'Y', escreve 'B' e move para a direita.

(Apaga os algarismos do numerador que deram divisão exata e, portanto, estão marcados como 'Y')

$\delta(q16,Y)=(q16,B,R)$

Lendo '-', move para a direita. (Não apaga o sinal '-')

$\delta(q16,-)=(q16,-,R)$

Lendo '0', vai para q18 e move para a esquerda. (Apagou todos os 'Y')

$\delta(q16,0)=(q18,0,R)$

Lendo '1', vai para q19 e move para a esquerda. (Apagou todos os 'Y', mas a divisão deu exata, é preciso colocar o símbolo de zero)

$\delta(q16,1)=(q19,1,L)$

Em **q19**, lendo 'B', escreve zero, vai para q40 e move para a esquerda. (escreve o símbolo para resto zero)

$\delta(q19,B)=(q40,@,L)$

Em **q40**, lendo 'B', move para a esquerda. (Procura pelo sinal do Resto)

$\delta(q40,B)=(q40,B,L)$

Lendo, '-', escreve 'B', vai para q41 e move para a direita. (Apaga o sinal do Resto - que é zero)

$\delta(q40,-)=(q41,B,R)$

Lendo '\$', vai para q41 e move para a direita. (Não encontrou sinal, volta)

$\delta(q40,$)=(q41,$,R)$

Em **q41**, lendo 'B', move para a direita. (Já apagou sinal do resto, ou já era positivo)

$\delta(q41,B)=(q41,B,R)$

Lendo '0' ou '@', vai para q18 e move para a direita.

$\delta(q41,0)=(q18,0,R)$

$\delta(q41,@)=(q18,@,R)$

Lendo '1', vai para q20 e move para a direita.

$\delta(q41,1)=(q20,1,R)$

Em **q18**, lendo '0', move para a direita. (Procurando o quociente para ver se é zero, mas ainda está lendo o resto)

$\delta(q18,0)=(q18,0,R)$

Lendo '1', vai para q20 e move para a direita. (Achou o separador, vai começar a ler o quociente)

$$\delta(q_{18}, 1) = (q_{20}, 1, R)$$

Em **q20**, lendo '0', vai para q21 e move para a esquerda. (quociente não é zero)

$$\delta(q_{20}, 0) = (q_{21}, 0, L)$$

Lendo 'B', escreve '@', vai para q39 e move para a esquerda. (quociente é zero, não pode ser negativo)

$$\delta(q_{20}, B) = (q_{39}, @, L)$$

Lendo '-', move para a direita.

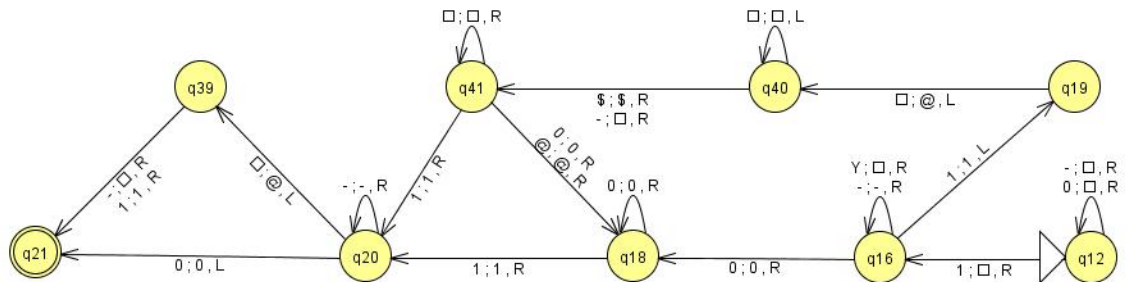
$$\delta(q_{20}, -) = (q_{20}, -, R)$$

Em **q39**, lendo '-', escreve 'B', vai para q21 e move para a direita.

$$\delta(q_{39}, -) = (q_{21}, B, R)$$

Lendo '1', vai para q21 e move para a direita.

$$\delta(q_{39}, 1) = (q_{21}, 1, R)$$



**Função\_7: Trata a Divisão por zero**

Em **q22**, lendo '1', escreve 'B', vai para q23 e move para a direita.

$$\delta(q22,1)=(q23, B,R)$$

Em **q23**, lendo '0', '-' ou '@', move para a direita. (lendo o numerador)

$$\delta(q23,0)=(q23, 0,R)$$

$$\delta(q23,-)=(q23, -,R)$$

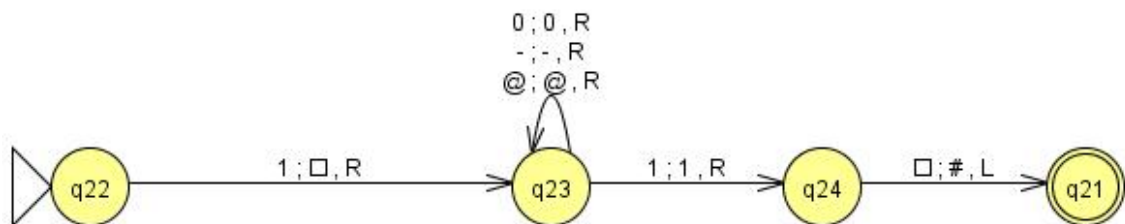
$$\delta(q23,@)=(q23, @,R)$$

Lendo '1', vai para q24 e move para a direita.  
(encontrou o final da cadeia)

$$\delta(q23,1)=(q24,1,R)$$

Em **q24**, lendo 'B', escreve '#', vai para q21 e move para a esquerda. (Escreve símbolo de divisão por zero no lugar do quociente)

$$\delta(q24,B)=(q21,\#,L)$$



**Função\_8: Acrescenta '\$' ao final e Desloca à Esquerda**

Em **q21**, lendo '0', '1', '@', '#' ou '-', move para a direita. (Procura fim da cadeia)

$\delta(q_{21}, 0) = (q_{21}, 0, R)$

$\delta(q_{21}, 1) = (q_{21}, 1, R)$

$\delta(q_{21}, @) = (q_{21}, @, R)$

$\delta(q_{21}, \#) = (q_{21}, \#, R)$

$\delta(q_{21}, -) = (q_{21}, -, R)$

Lendo 'B', escreve '\$' vai para q25 e move para a esquerda. (Delimita o final da cadeia)

$\delta(q_{21}, B) = (q_{25}, \$, L)$

Lendo '\$', vai para q25 e move para a esquerda. (Final da cadeia já foi delimitado antes, com numerador zero)

$\delta(q_{21}, \$) = (q_{25}, \$, L)$

Em **q25**, lendo '0', '1', '@', '#', ou '-', move para a esquerda. (Procura início da cadeia)

$\delta(q_{25}, 0) = (q_{25}, 0, L)$

$\delta(q_{25}, 1) = (q_{25}, 1, L)$

$\delta(q_{25}, @) = (q_{25}, @, L)$

$\delta(q_{25}, \#) = (q_{25}, \#, L)$

$\delta(q_{25}, -) = (q_{25}, -, L)$

$\delta(q_{25}, B) = (q_{25}, B, L)$

Lendo '\$', vai para q26 e move para a direita. (Encontrou o início da cadeia)

$\delta(q_{25}, \$) = (q_{26}, \$, R)$

Em **q26**, lendo 'd', escreve 'B', vai para [q17,d] e move para a esquerda, onde  $d = \{0, 1, @, \#\}$

$\delta(q_{26}, 0) = ([q_{17}, 0], B, L)$

$\delta(q_{26}, 1) = ([q_{17}, 1], B, L)$

$\delta(q_{26}, @) = ([q_{17}, @], B, L)$

$\delta(q_{26}, \#) = ([q_{17}, \#], B, L)$

$\delta(q_{26}, -) = ([q_{17}, -], B, L)$

Lendo 'B', move para a direita.

$\delta(q_{26}, B) = ([q_{26}, B], R)$

Em **[q17,d]**, lendo 'B', move para a esquerda (procura início da cadeia)

$\delta([q_{17}, 0], B) = ([q_{17}, 0], B, L)$

$\delta([q_{17}, 1], B) = ([q_{17}, 1], B, L)$

$\delta([q_{17}, @], B) = ([q_{17}, @], B, L)$

$\delta([q_{17}, \#], B) = ([q_{17}, \#], B, L)$

$\delta([q_{17}, -], B) = ([q_{17}, -], B, L)$

Lendo '0', '1', '\$', '#', '@', '\$' ou '-', vai para [q27,d] e move para a direita. (encontrou o início da cadeia, tem que escrever ao lado)

$\delta([q_{17}, 0], 0) = ([q_{27}, 0], 0, R)$

$\delta([q_{17}, 0], 1) = ([q_{27}, 0], 1, R)$

$\delta([q_{17}, 0], @) = ([q_{27}, 0], @, R)$

$\delta([q_{17}, 0], \#) = ([q_{27}, 0], \#, R)$

$\delta([q_{17},0],\$) = ([q_{27},0],\$,R)$   
 $\delta([q_{17},0],-) = ([q_{27},0],-,R)$   
 $\delta([q_{17},1],0) = ([q_{27},1],0,R)$   
 $\delta([q_{17},1],1) = ([q_{27},1],1,R)$   
 $\delta([q_{17},1],@) = ([q_{27},1],@,R)$   
 $\delta([q_{17},1],\#) = ([q_{27},1],\#,R)$   
 $\delta([q_{17},1],\$) = ([q_{27},1],\$,R)$   
 $\delta([q_{17},1],-) = ([q_{27},1],-,R)$   
 $\delta([q_{17},@],0) = ([q_{27},@],0,R)$   
 $\delta([q_{17},@],1) = ([q_{27},@],1,R)$   
 $\delta([q_{17},@],@) = ([q_{27},@],@,R)$   
 $\delta([q_{17},@],\#) = ([q_{27},@],\#,R)$   
 $\delta([q_{17},@],\$) = ([q_{27},@],\$,R)$   
 $\delta([q_{17},@],-) = ([q_{27},@],-,R)$   
 $\delta([q_{17},\#],0) = ([q_{27},\#],0,R)$   
 $\delta([q_{17},\#],1) = ([q_{27},\#],1,R)$   
 $\delta([q_{17},\#],@) = ([q_{27},\#],@,R)$   
 $\delta([q_{17},\#],\#) = ([q_{27},\#],\#,R)$   
 $\delta([q_{17},\#],\$) = ([q_{27},\#],\$,R)$   
 $\delta([q_{17},\#],-) = ([q_{27},\#],-,R)$   
 $\delta([q_{17},-],1) = ([q_{27},-],1,R)$   
 $\delta([q_{17},-],\$) = ([q_{27},-],\$,R)$

obs: o sinal ‘-’ só aceita vir logo depois do ‘\$’  
ou do ‘1’.

Em **[q27,d]**, lendo ‘B’, escreve ‘d’, vai para q28 e move para a direita. (escreve o símbolo a ser movido)

$\delta([q_{27},0],B) = (q_{28},0,R)$   
 $\delta([q_{27},1],B) = (q_{28},1,R)$   
 $\delta([q_{27},@],B) = (q_{28},@,R)$   
 $\delta([q_{27},\#],B) = (q_{28},\#,R)$   
 $\delta([q_{27},-],B) = (q_{28},-,R)$

Em **q28**, lendo ‘B’, move para a direita. (Procura o próximo símbolo)

$\delta(q_{28},B) = (q_{28},B,R)$

Lendo ‘d’, escreve ‘B’, vai para [q17,d] e move para a esquerda. (Lê e apaga o símbolo a ser movido)

$\delta(q_{28},0) = ([q_{17},0],B,L)$   
 $\delta(q_{28},1) = ([q_{17},1],B,L)$   
 $\delta(q_{28},@) = ([q_{17},@],B,L)$   
 $\delta(q_{28},\#) = ([q_{17},\#],B,L)$   
 $\delta(q_{28},-) = ([q_{17},-],B,L)$

Lendo ‘\$’, escreve ‘B’, vai para q29 e move para a esquerda. (encontrou o último símbolo)

$\delta(q_{28},\$) = (q_{29},B,L)$

Em **q29**, lendo ‘B’, move para a esquerda. (Procurando o início dos dados)

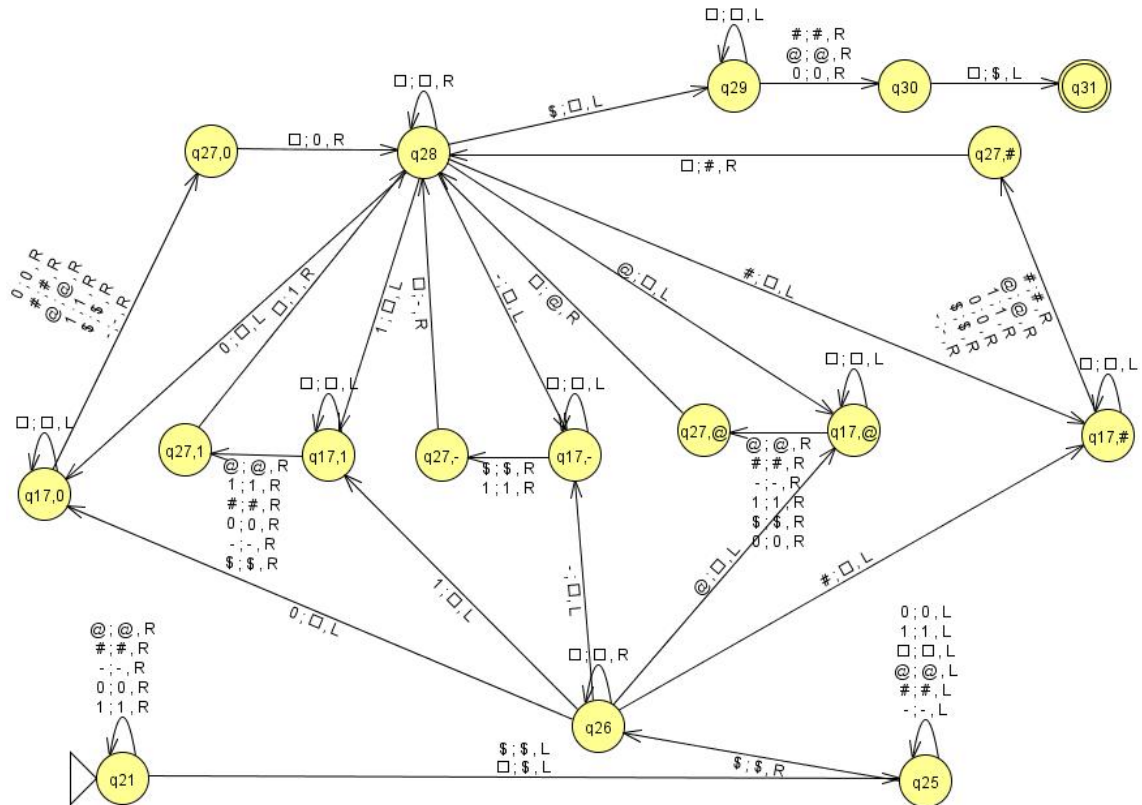
$\delta(q_{29},B) = (q_{29},B,L)$

Lendo ‘d’, vai para q30 e move para a direita.  
(encontrou o último símbolo já movido)

$\delta(q_{29}, 0) = (q_{30}, 0, R)$   
 $\delta(q_{29}, 1) = (q_{30}, 1, R) \Rightarrow \text{apagar}$   
 $\delta(q_{29}, @) = (q_{30}, @, R)$   
 $\delta(q_{29}, \#) = (q_{30}, \#, R)$

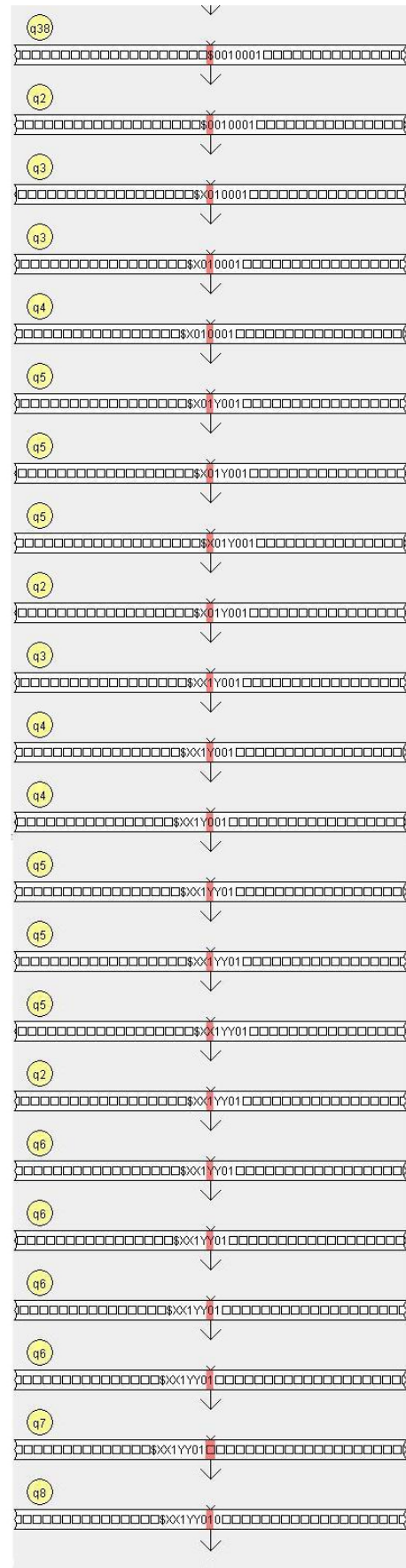
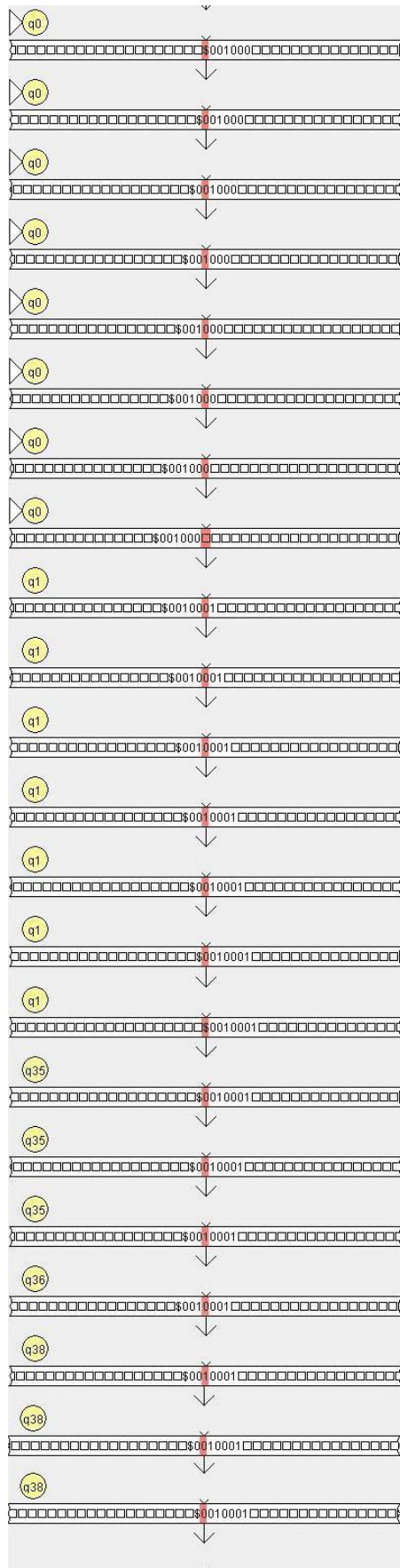
Em **q30**, lendo 'B' escreve '\$', vai para estado final q31 e move para a esquerda.

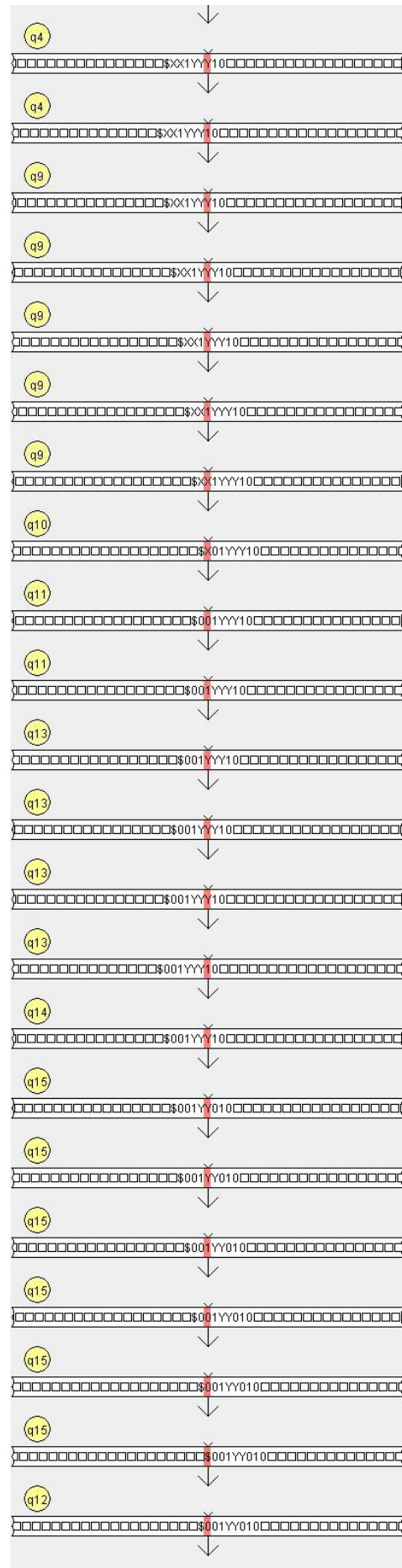
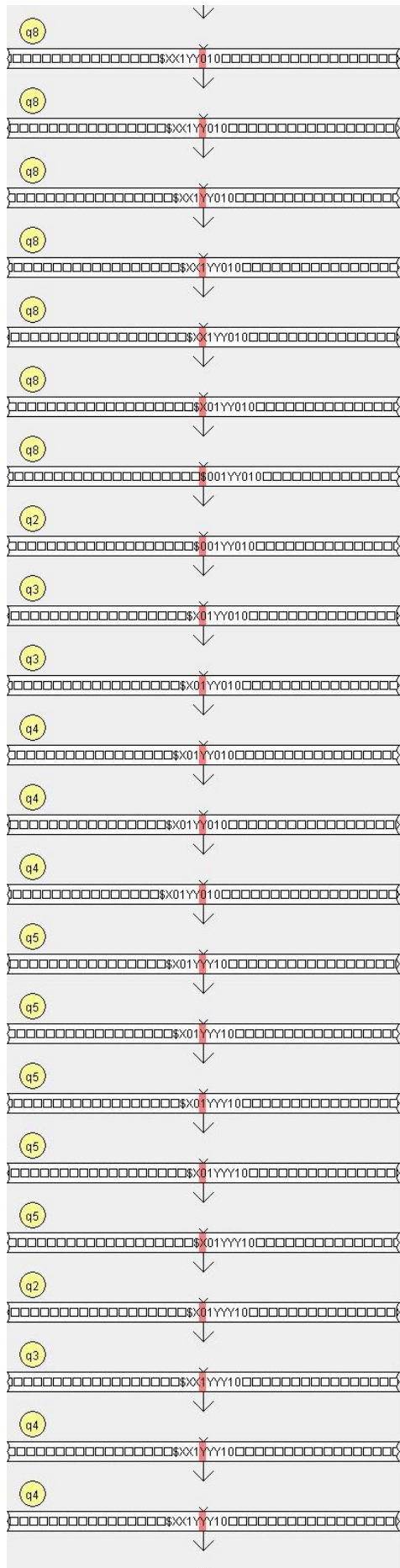
$\delta(q_{30}, B) = (q_{31}, \$, L)$

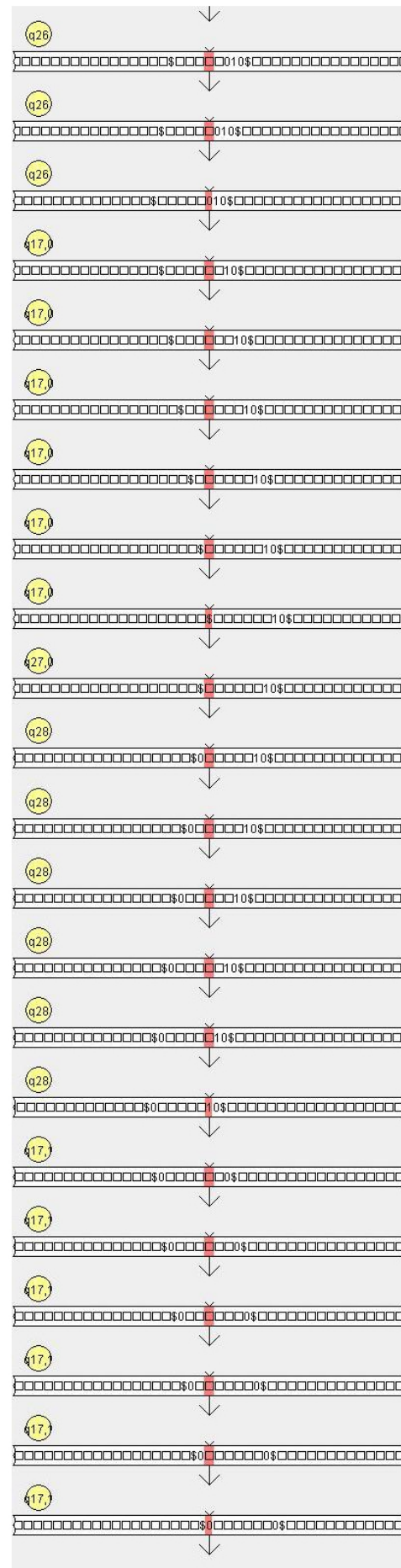
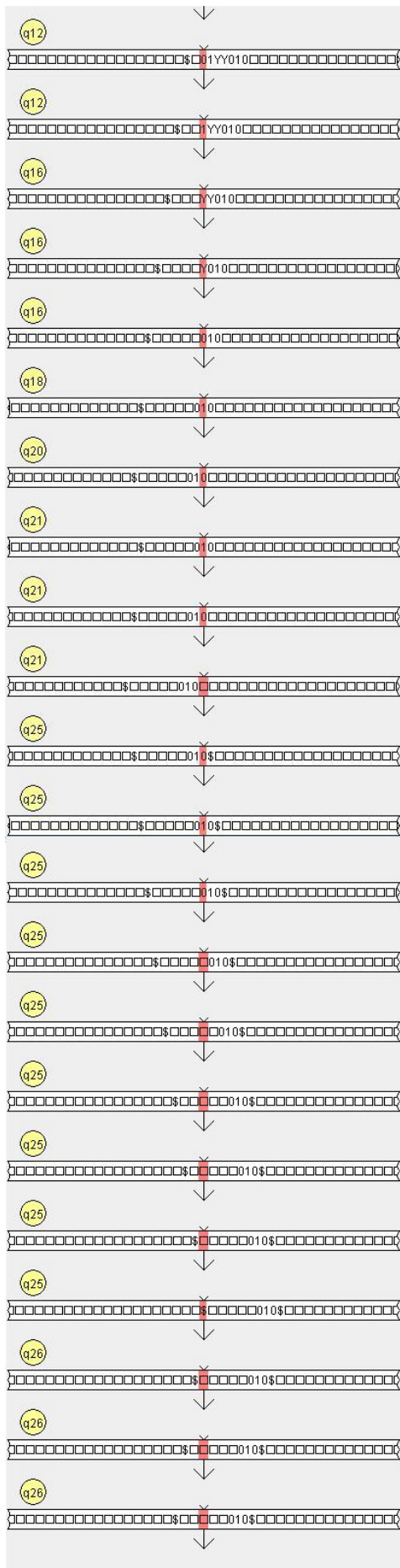


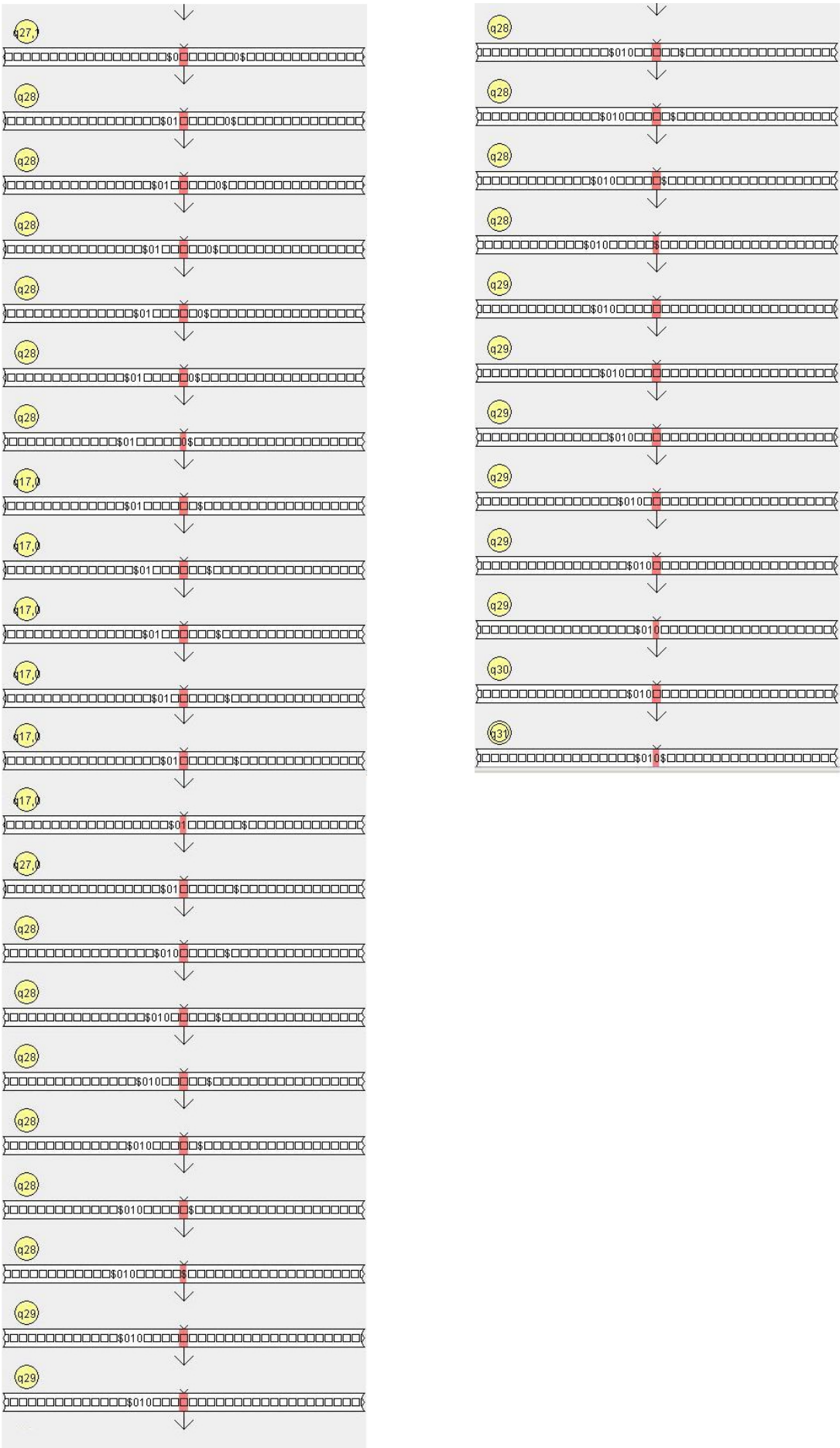
## 7. Execução Passo-a-passo

### 7.1. 3/2

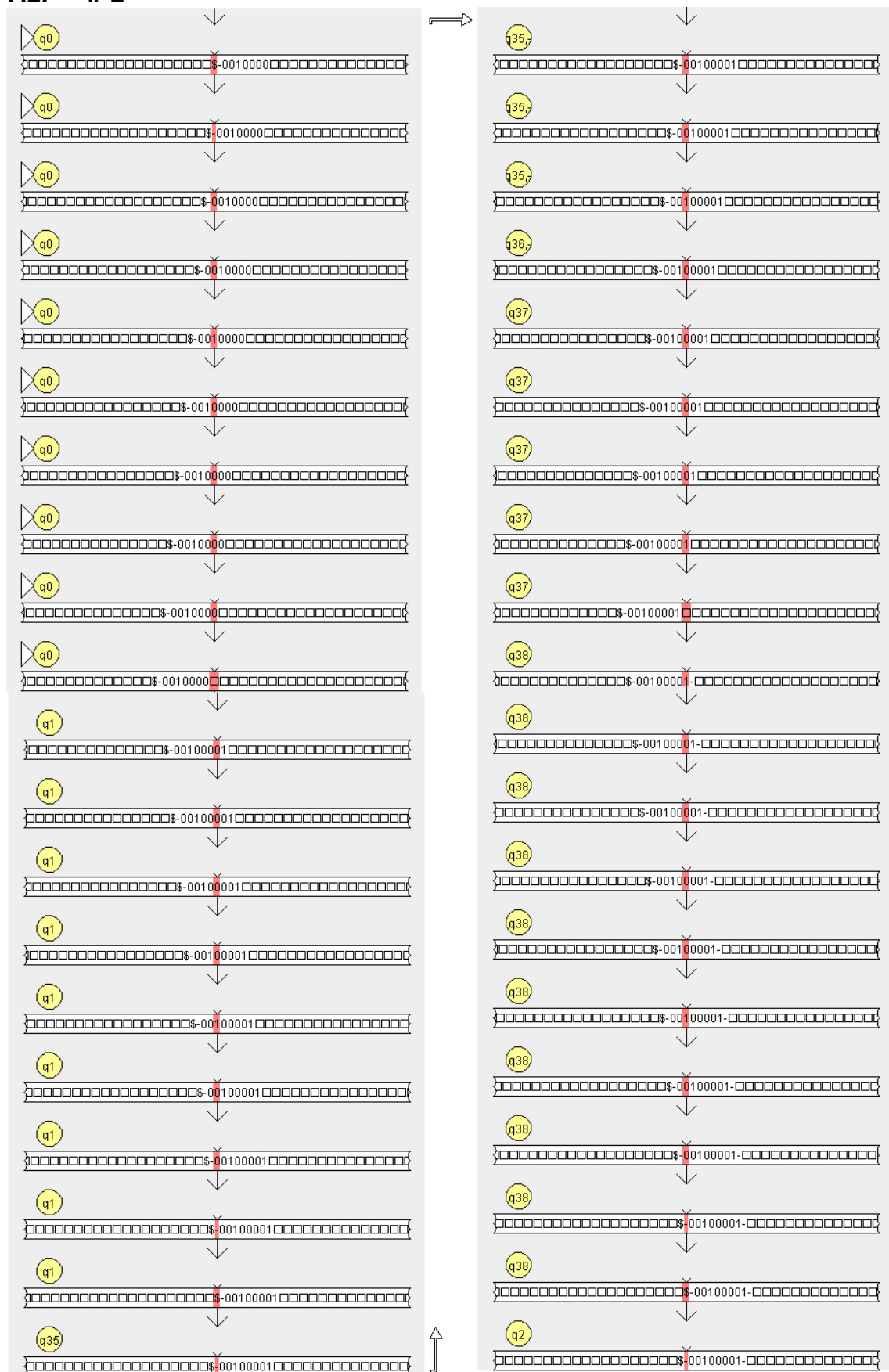


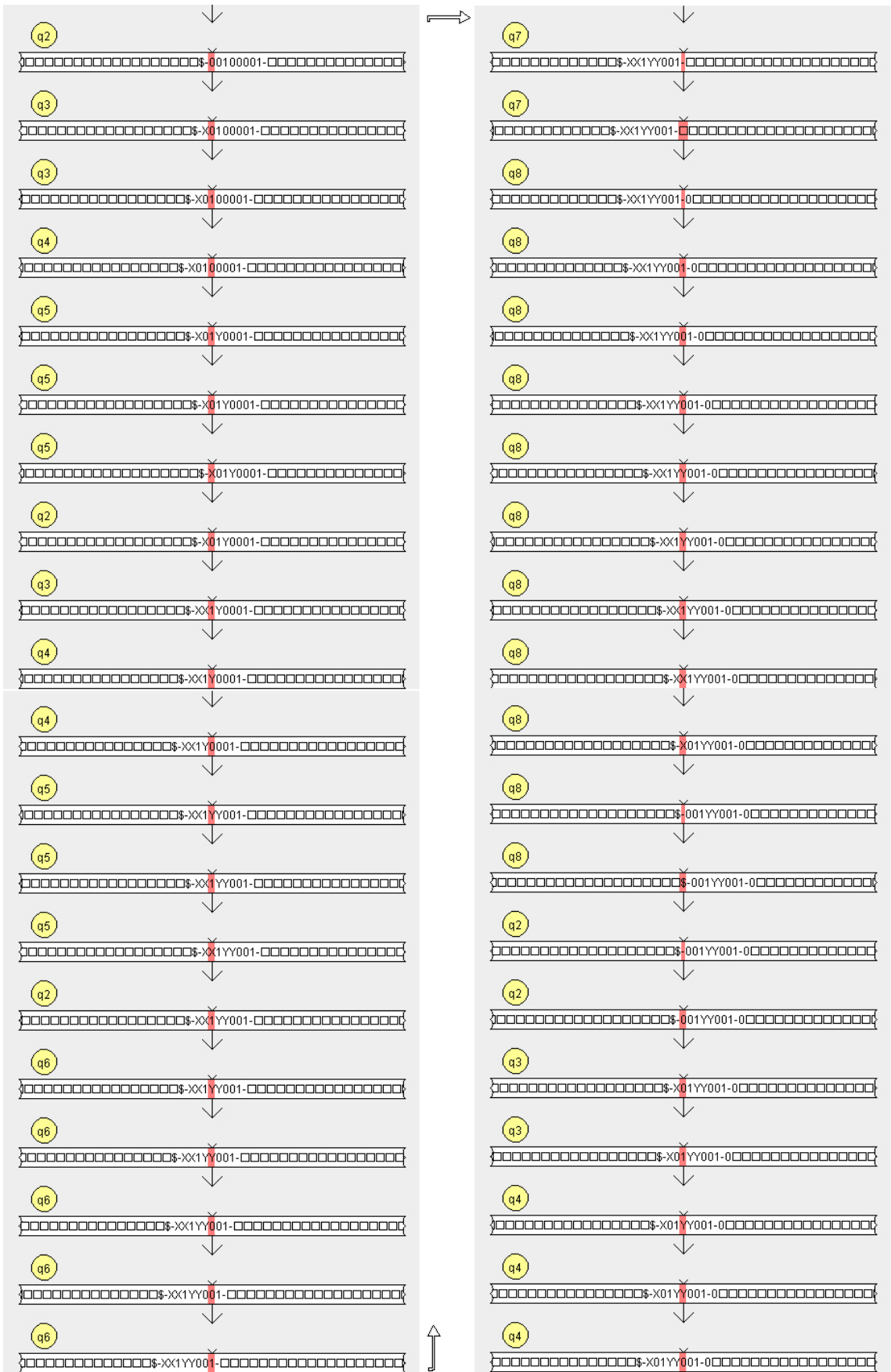


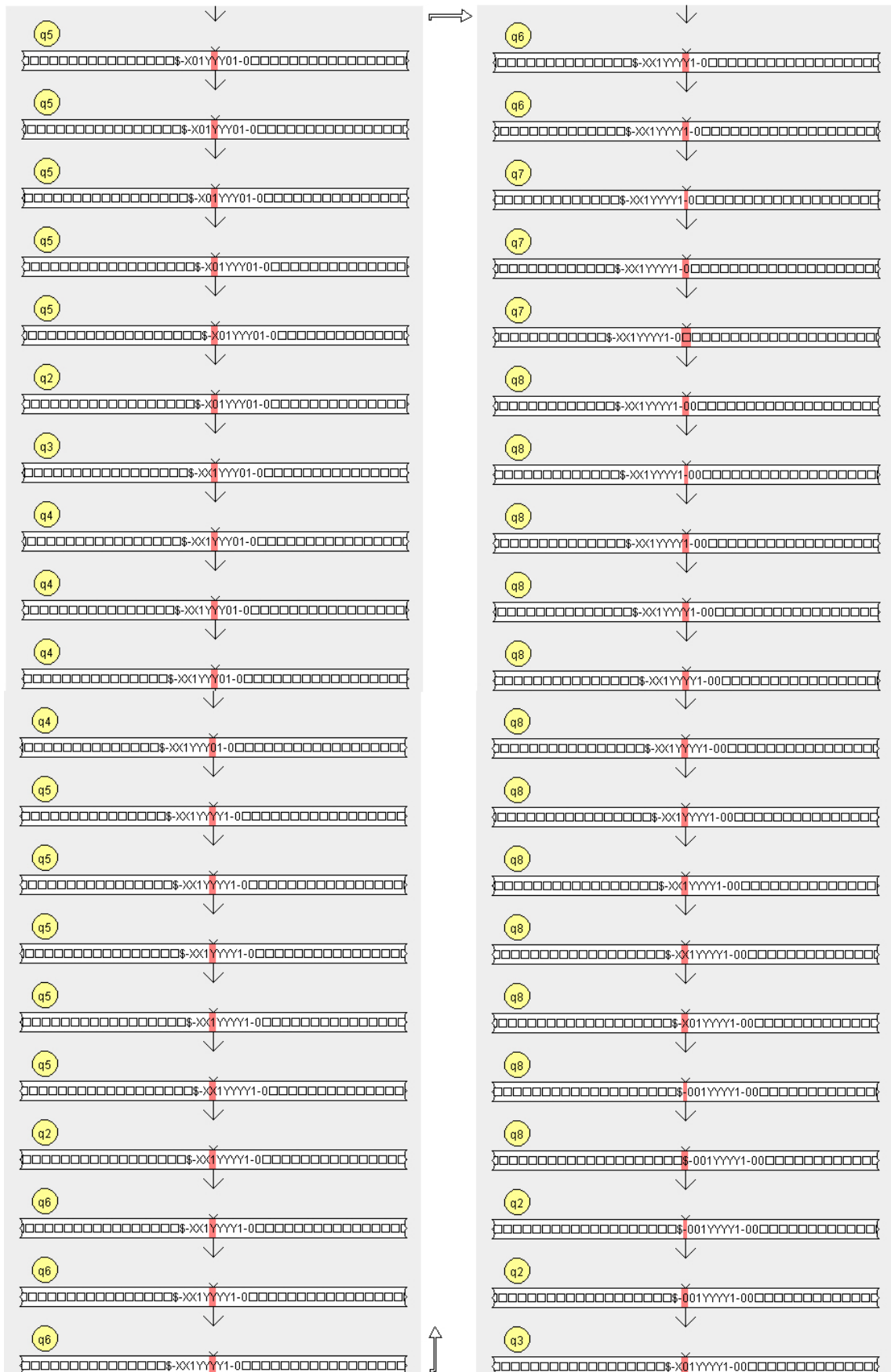


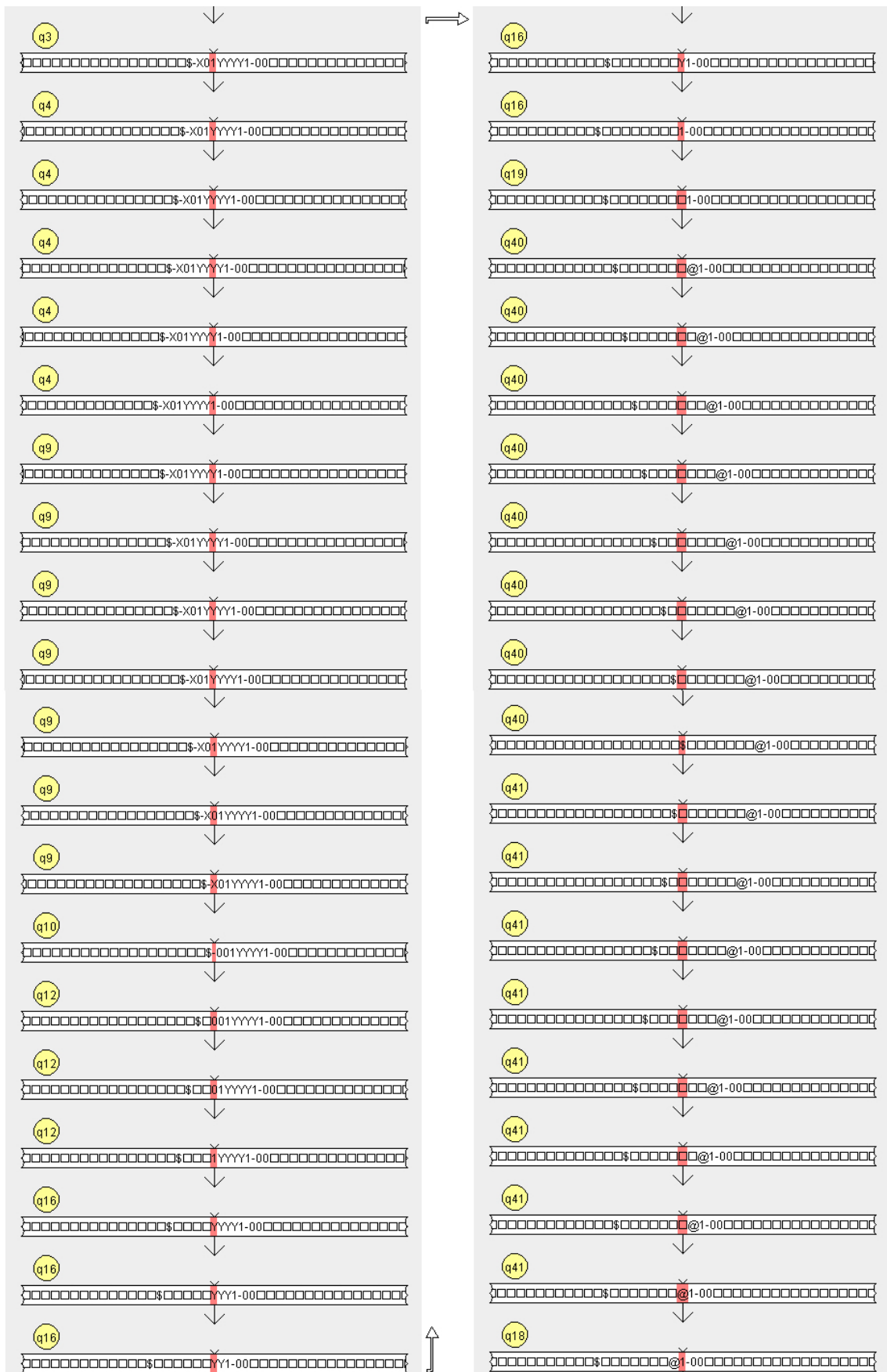


**7.2. 4/-2**

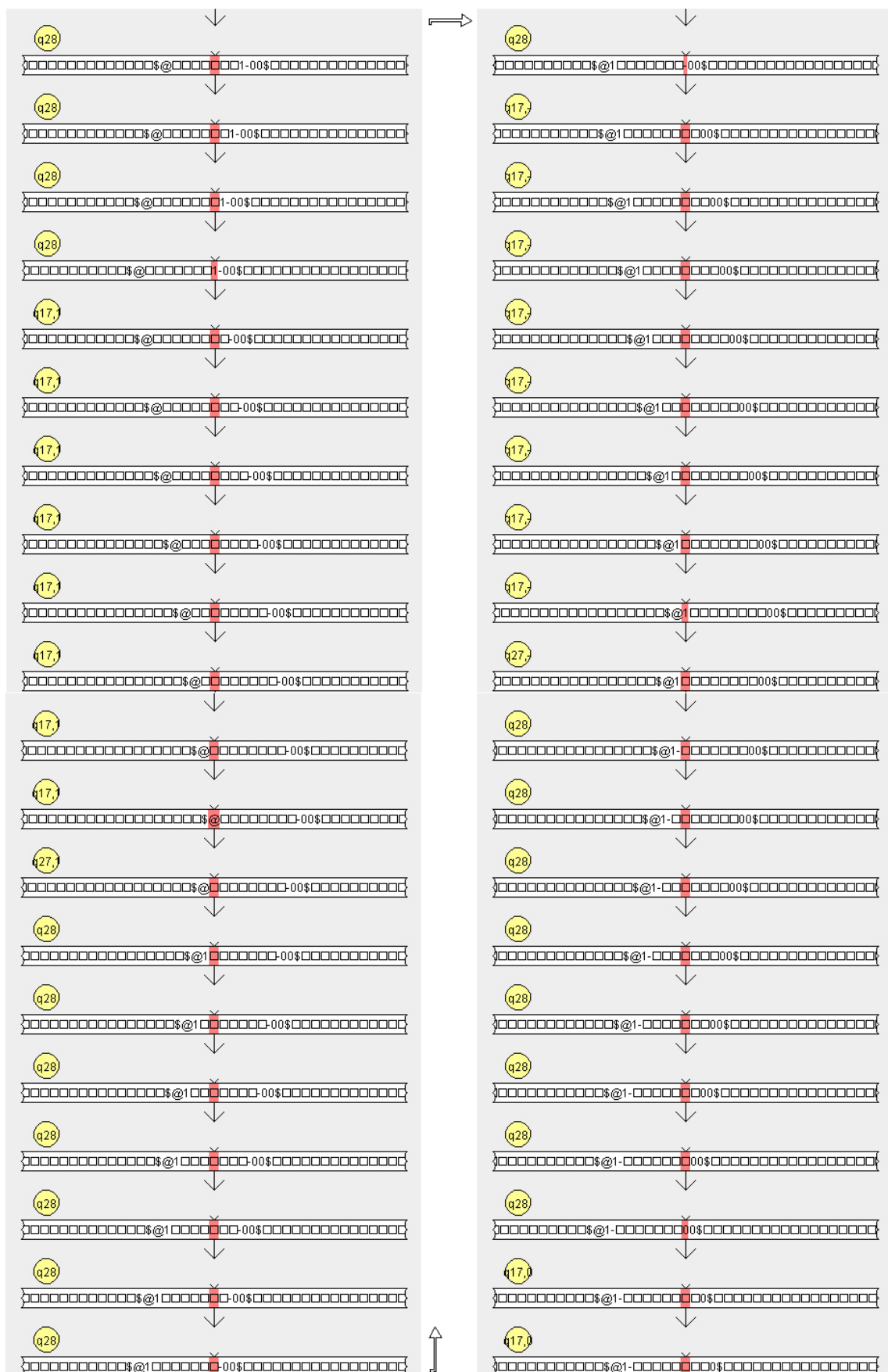


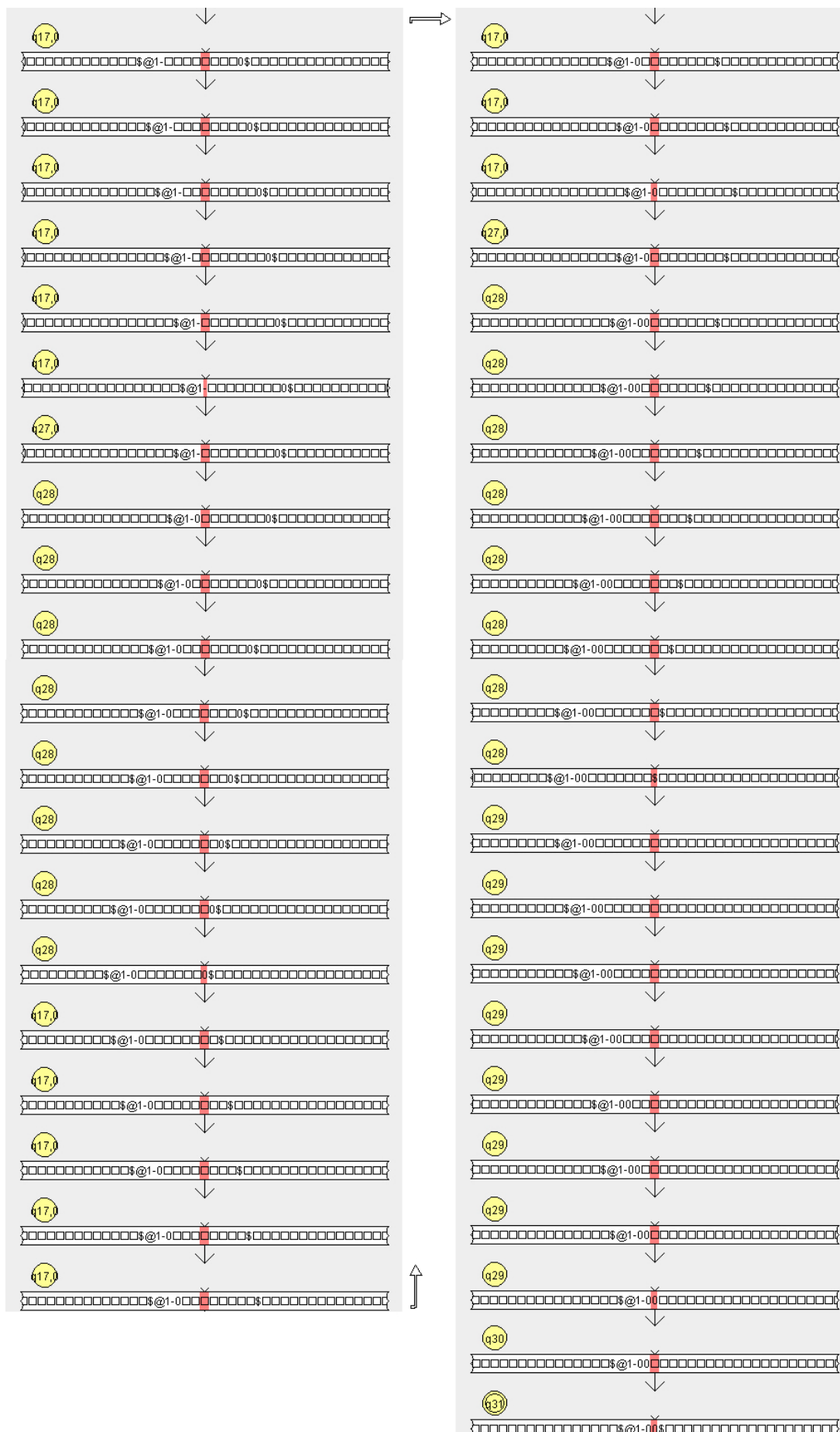




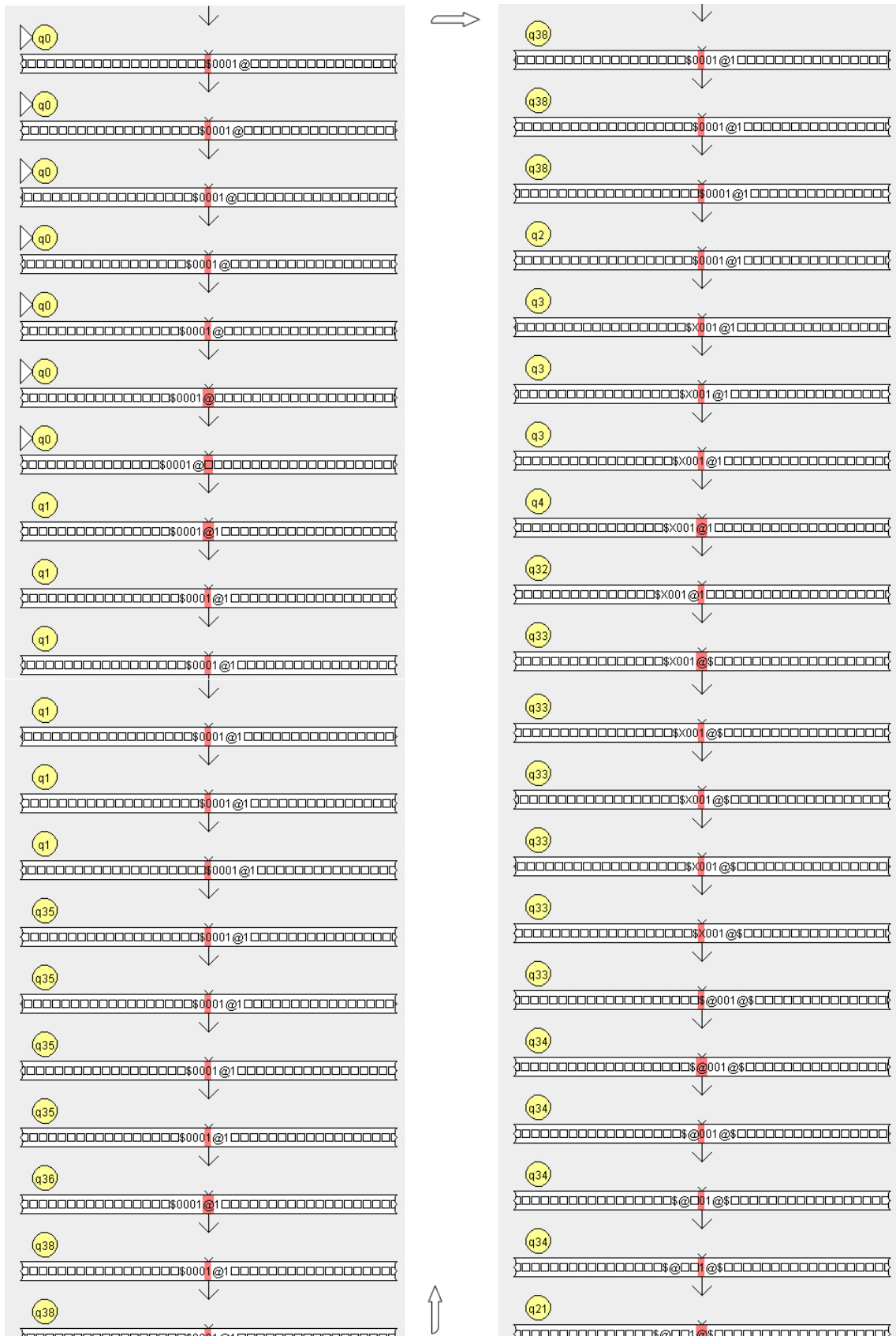


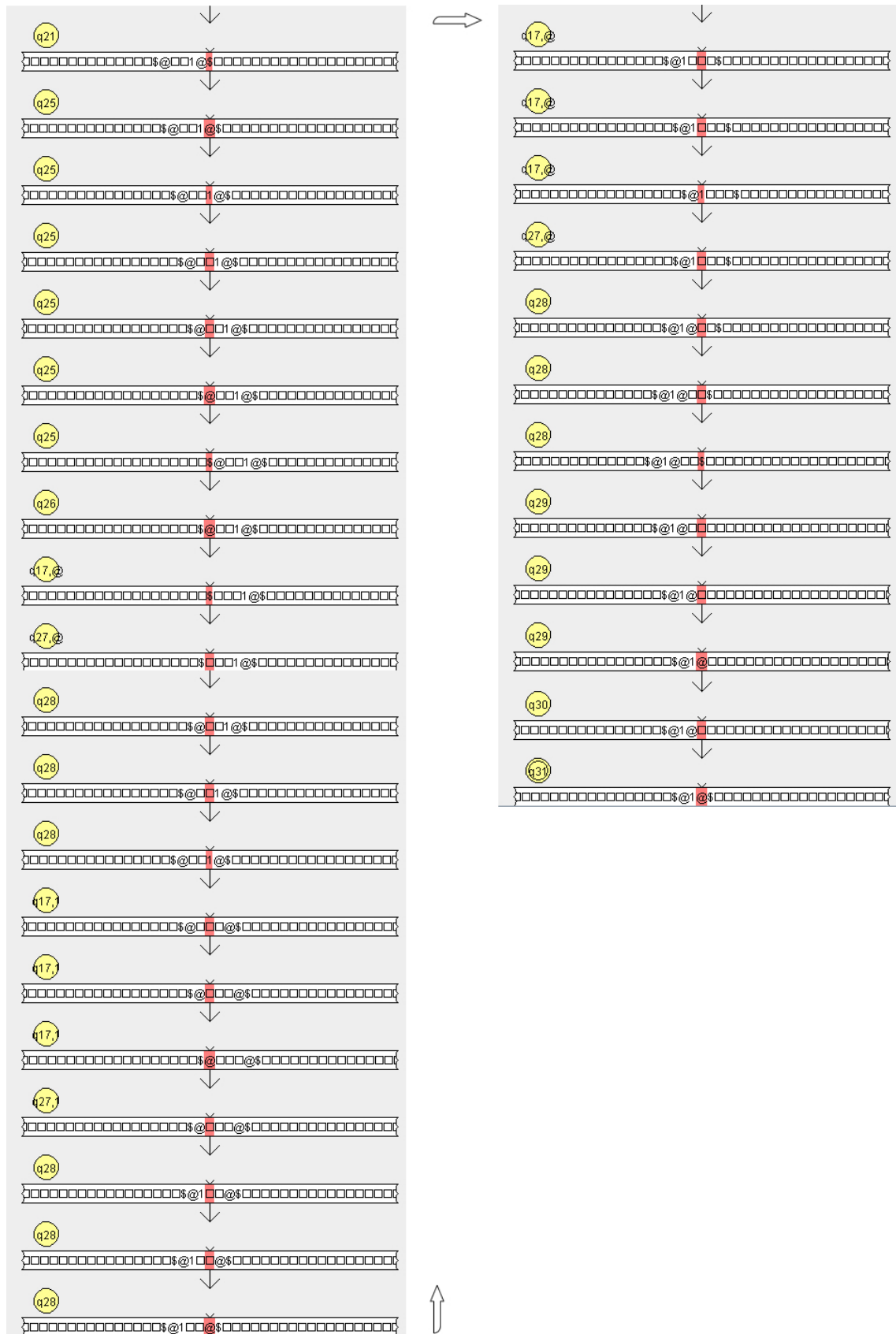




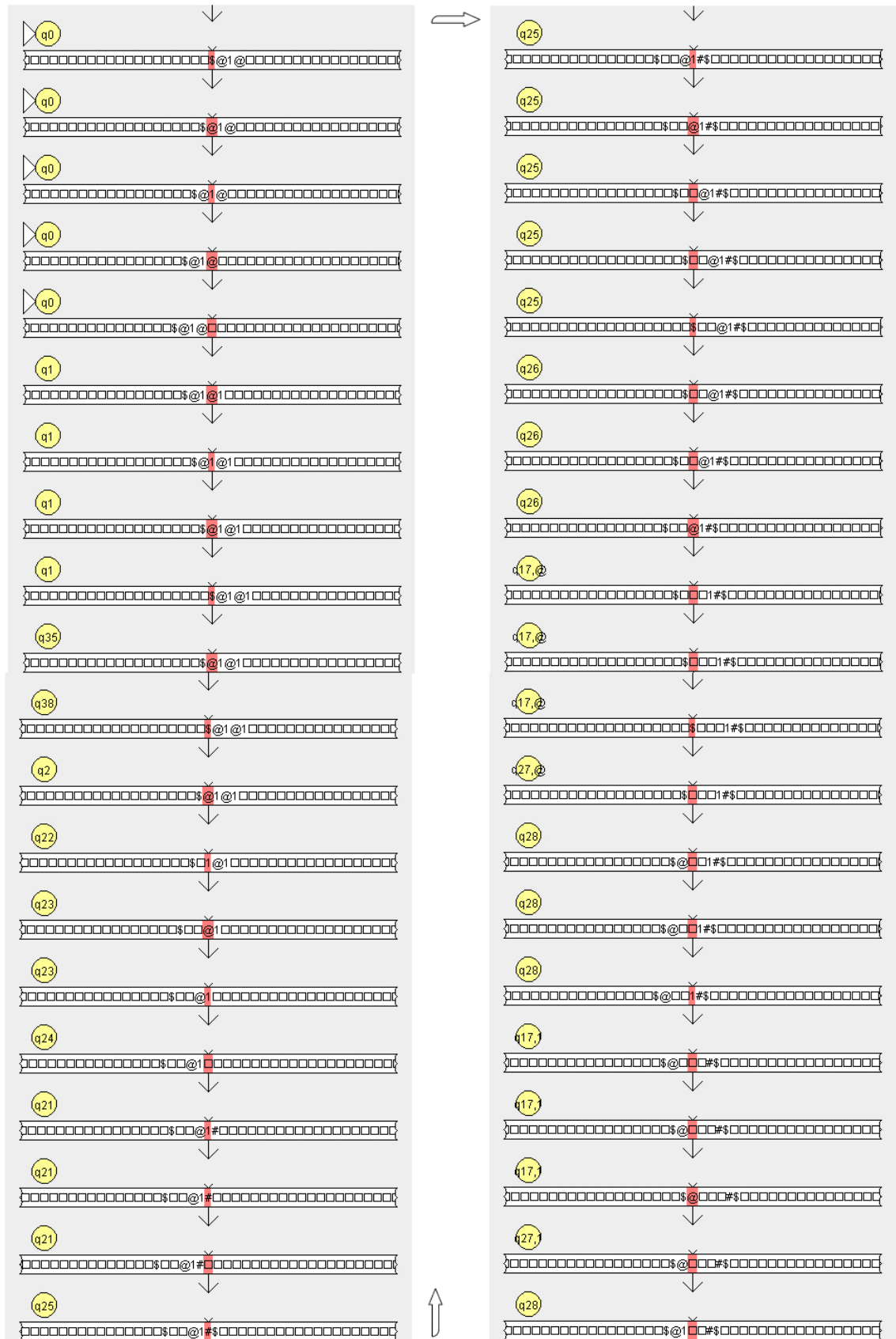


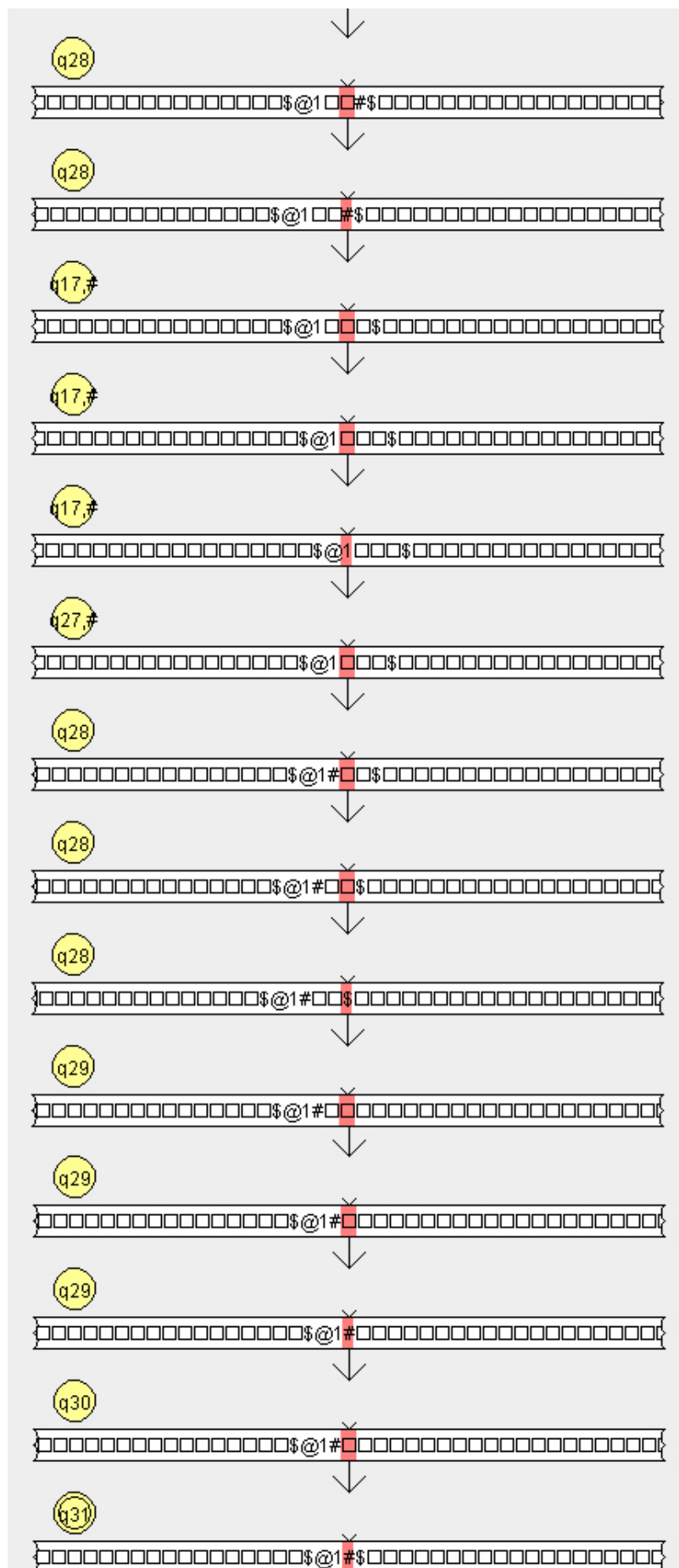
### 7.3. 0/3



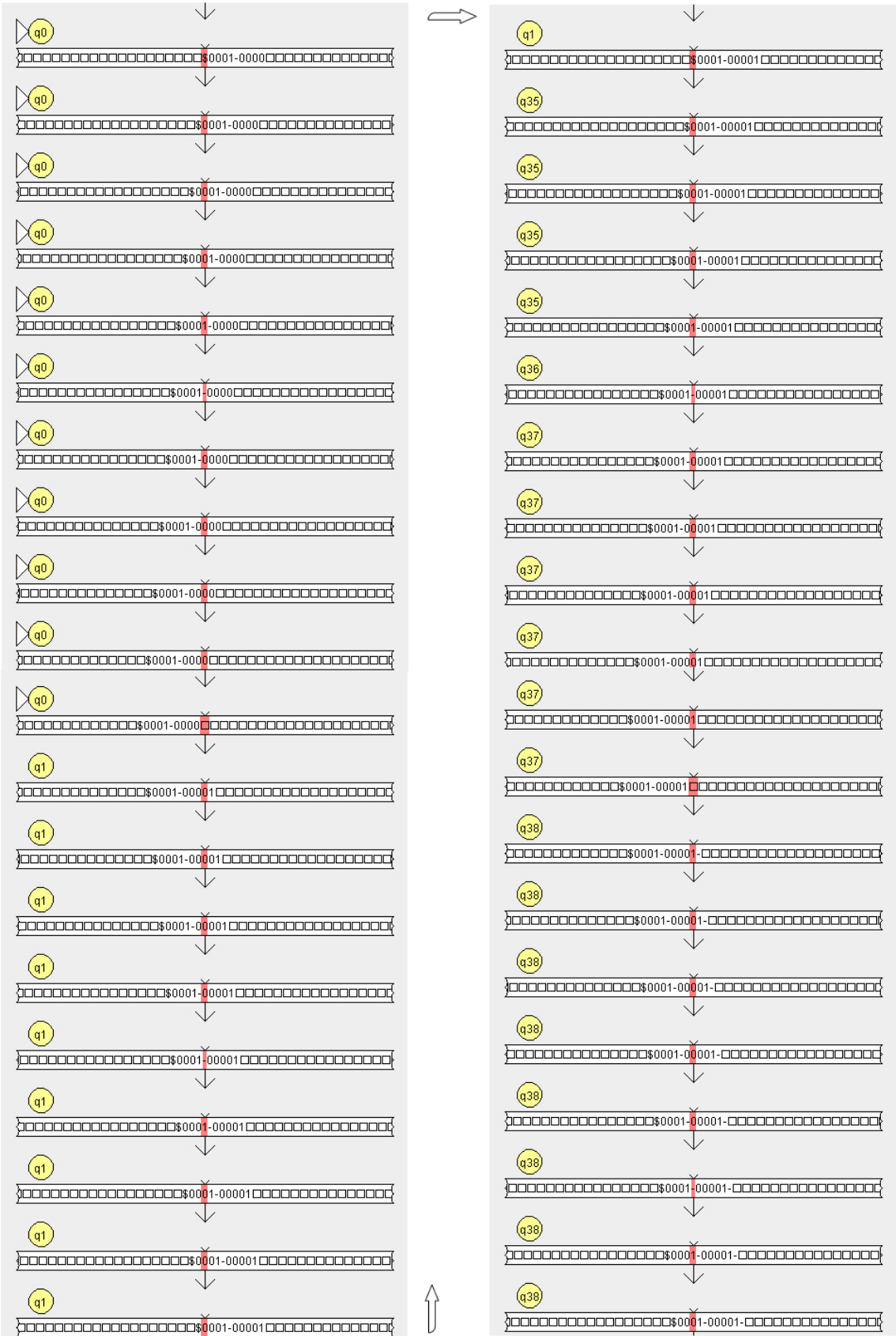


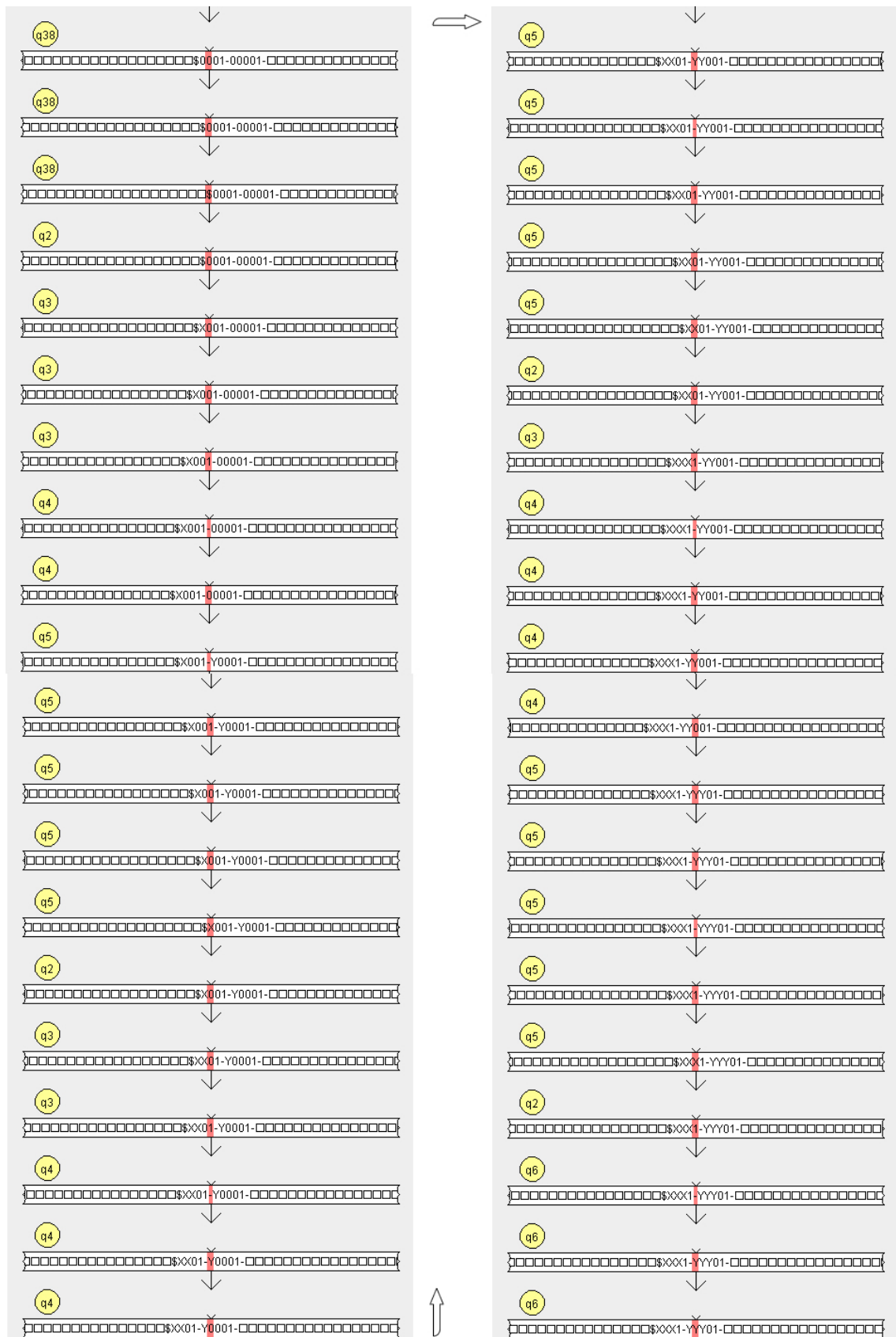
#### 7.4. 0/0

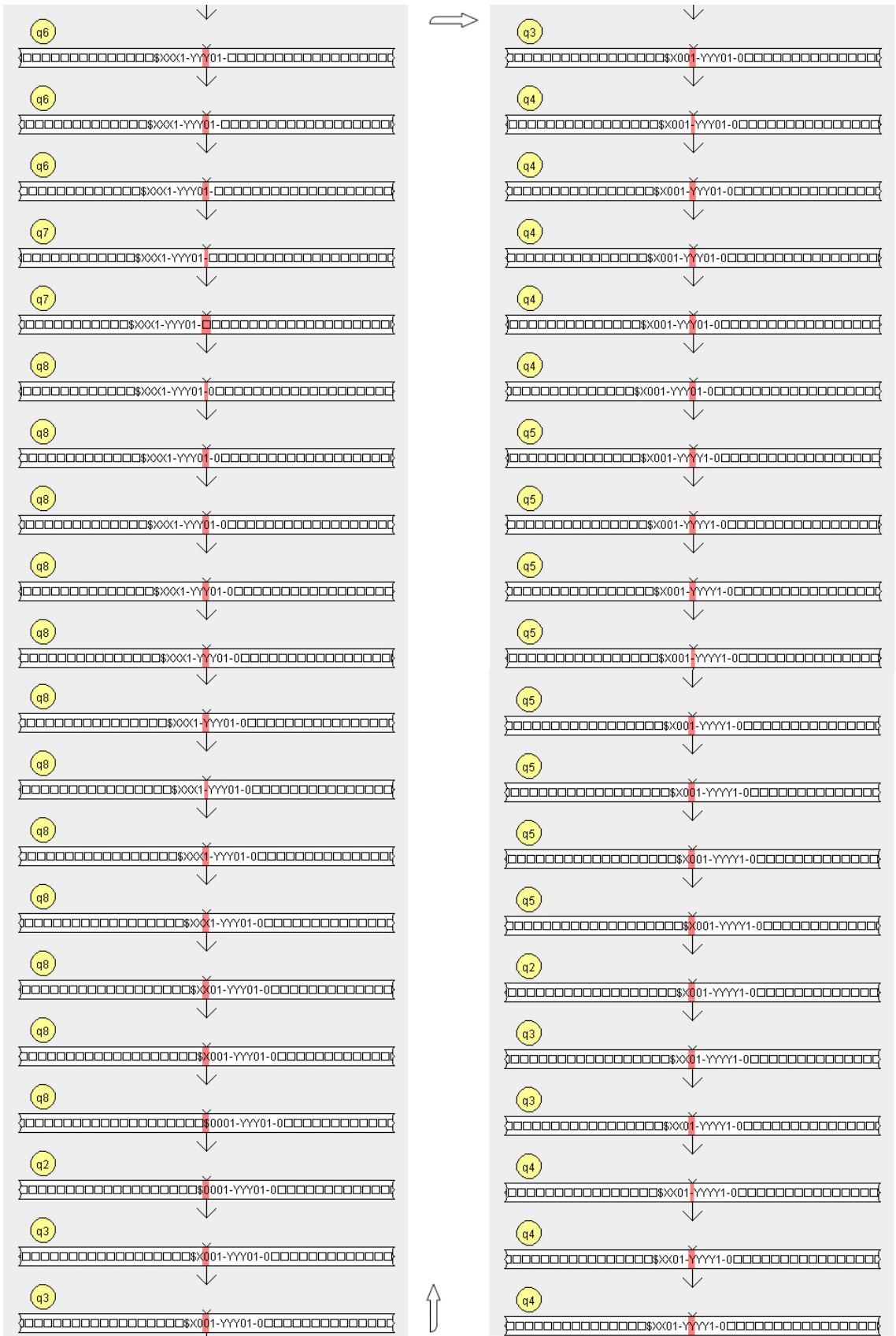


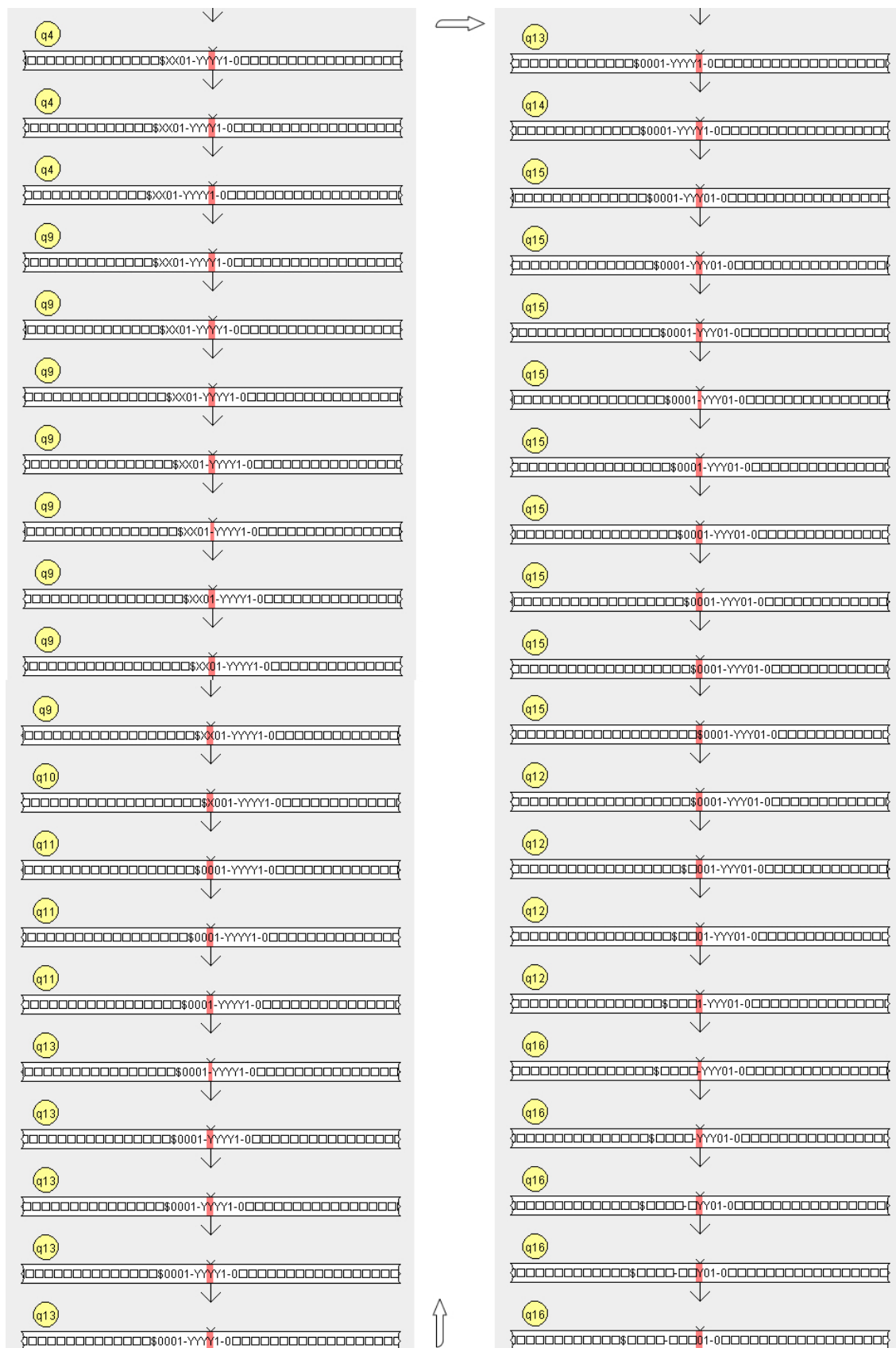


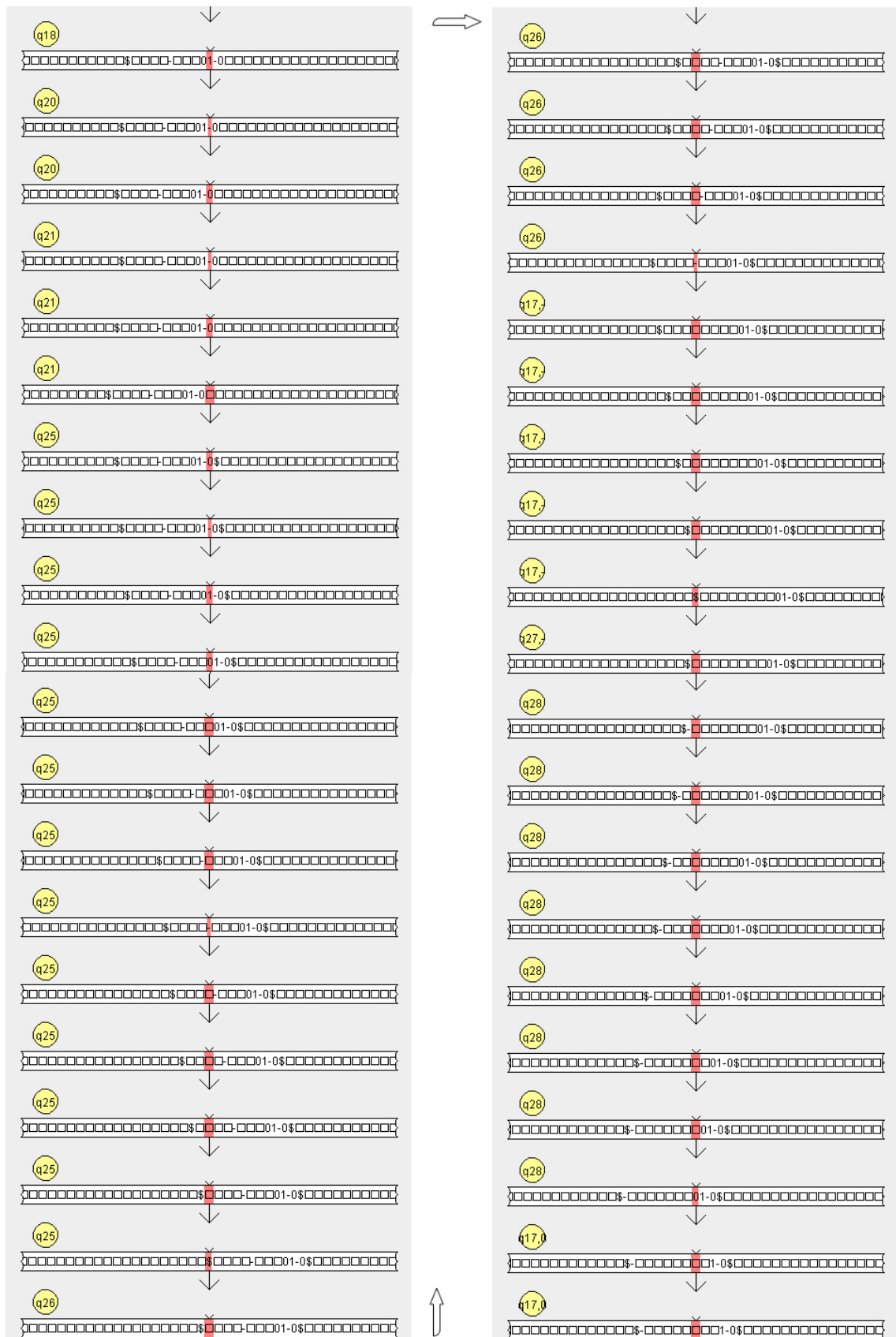
7.5. -4/3

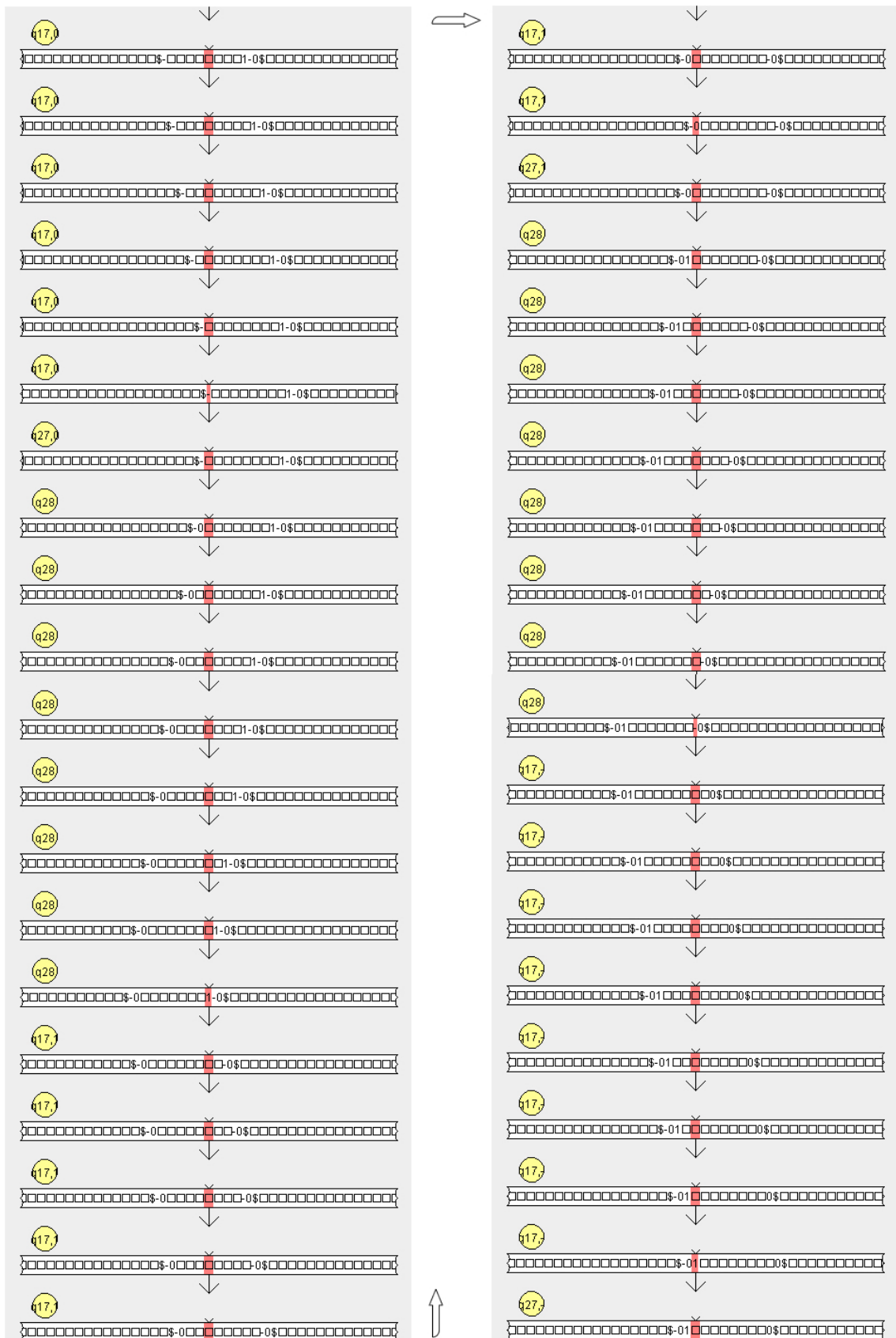


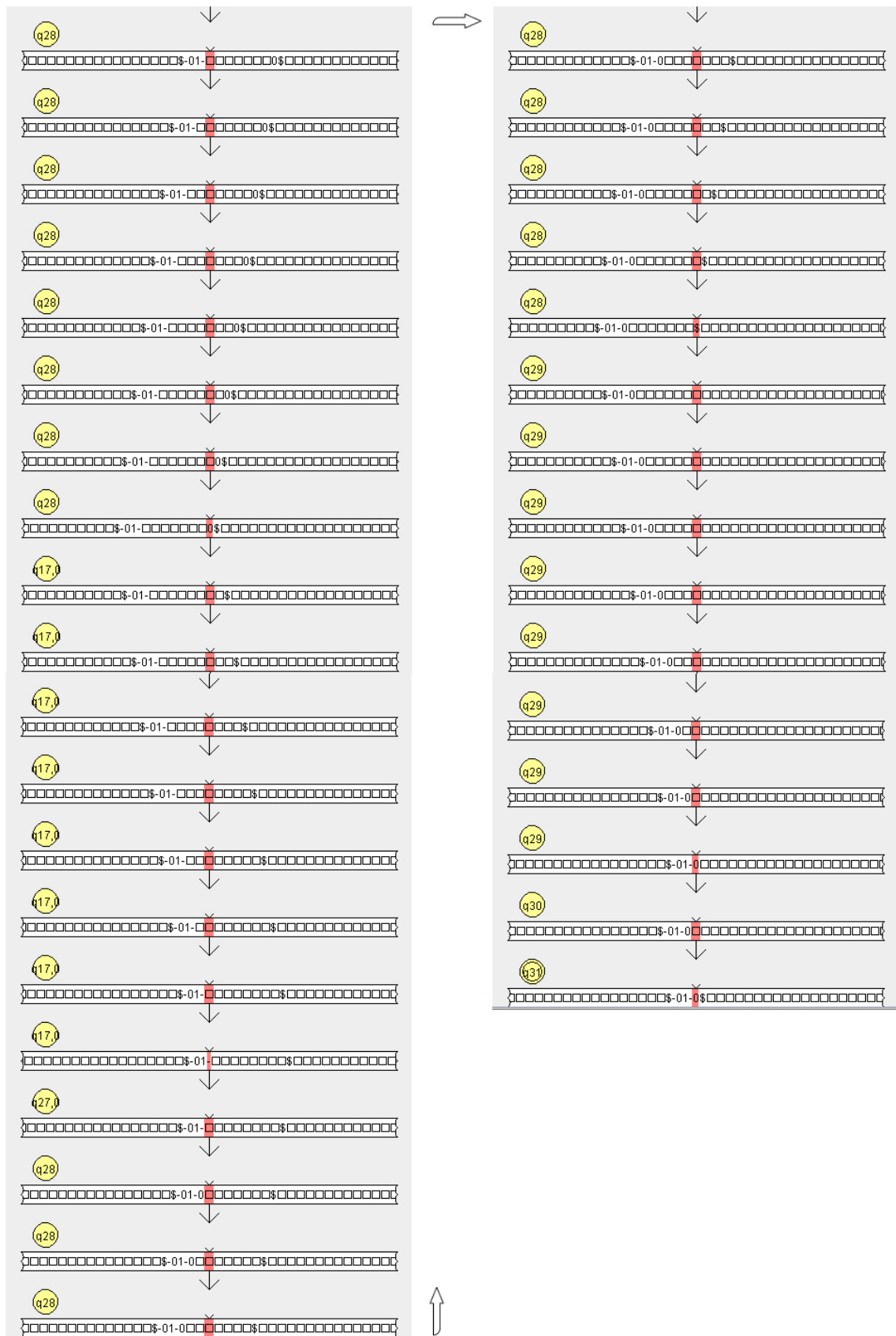




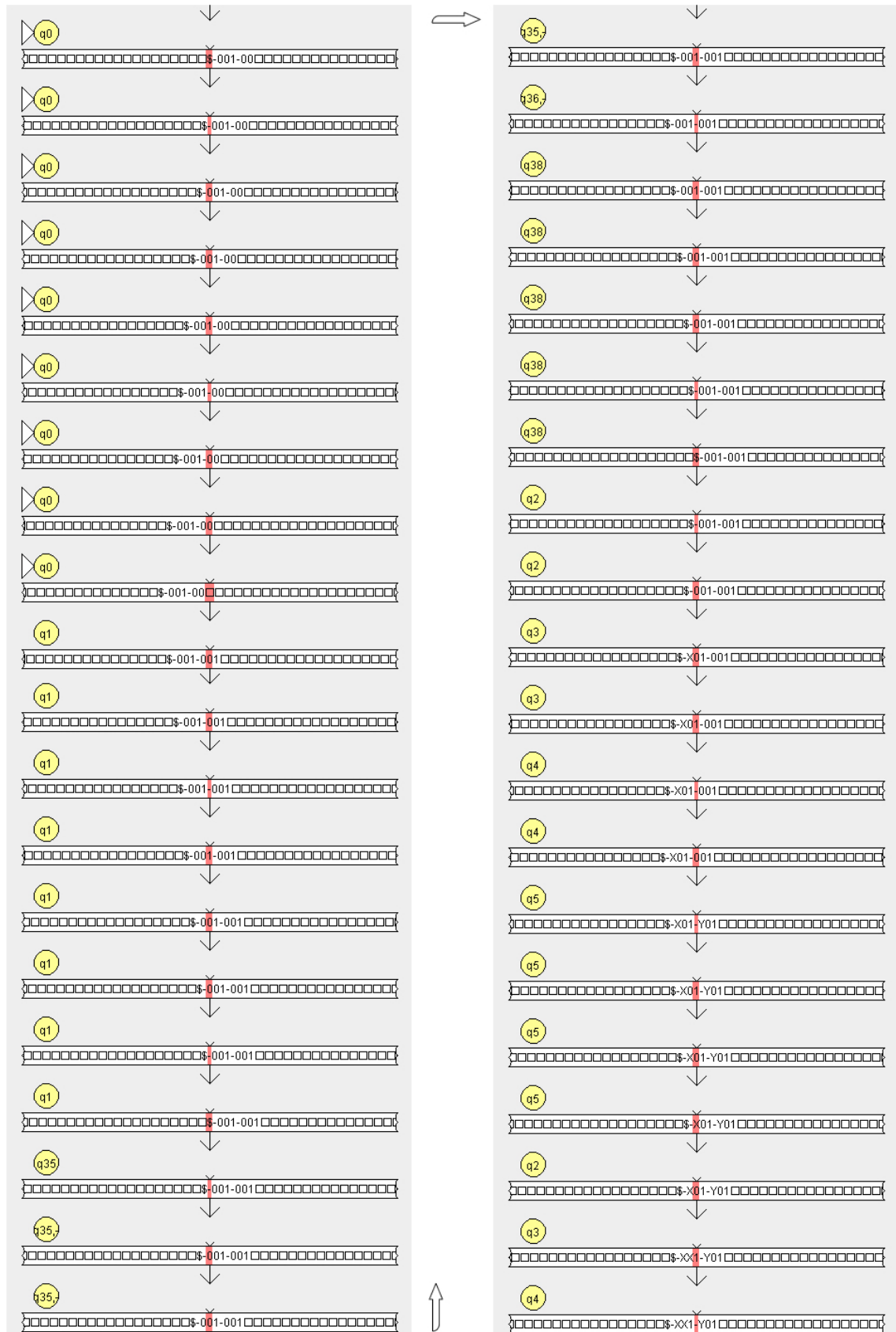




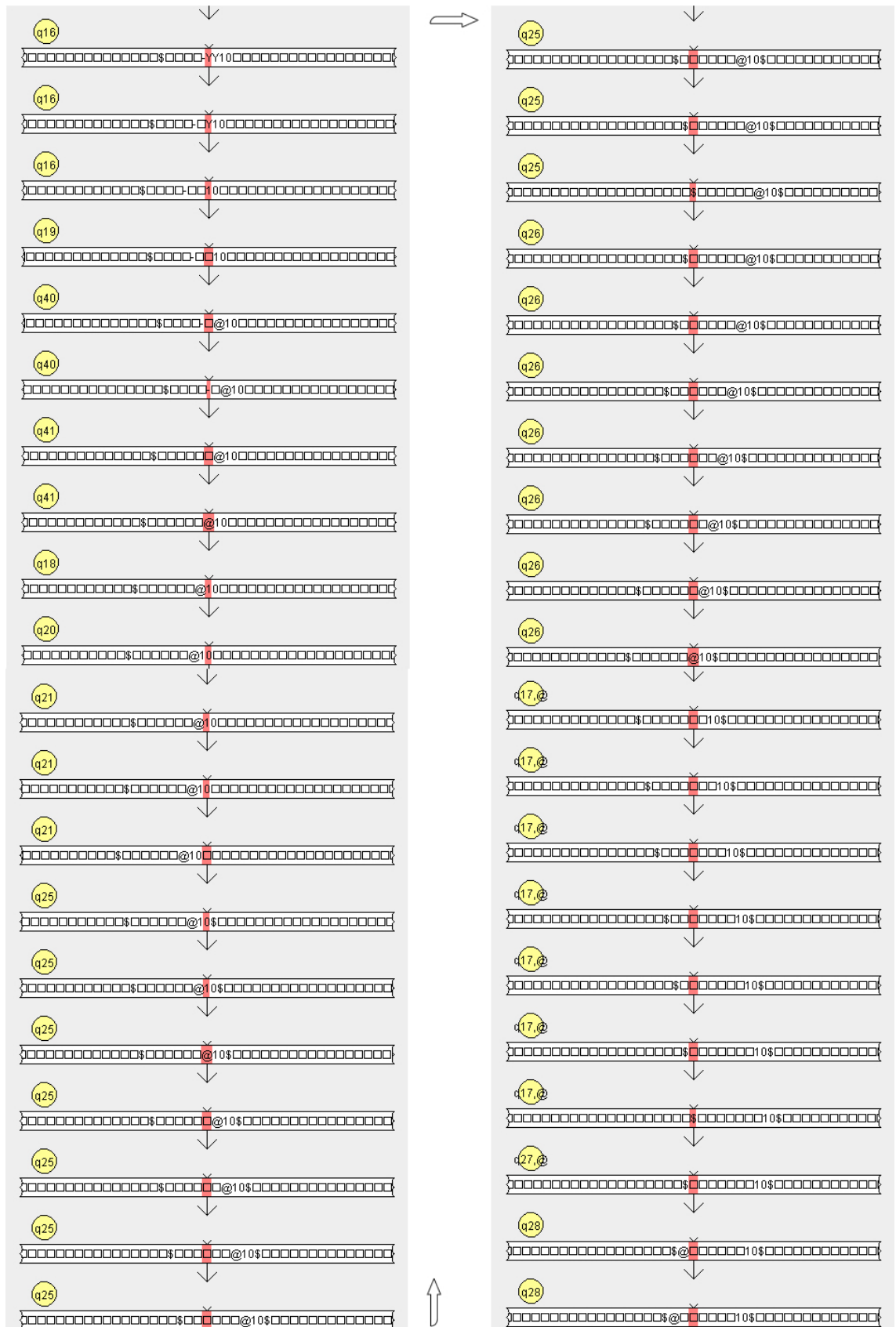


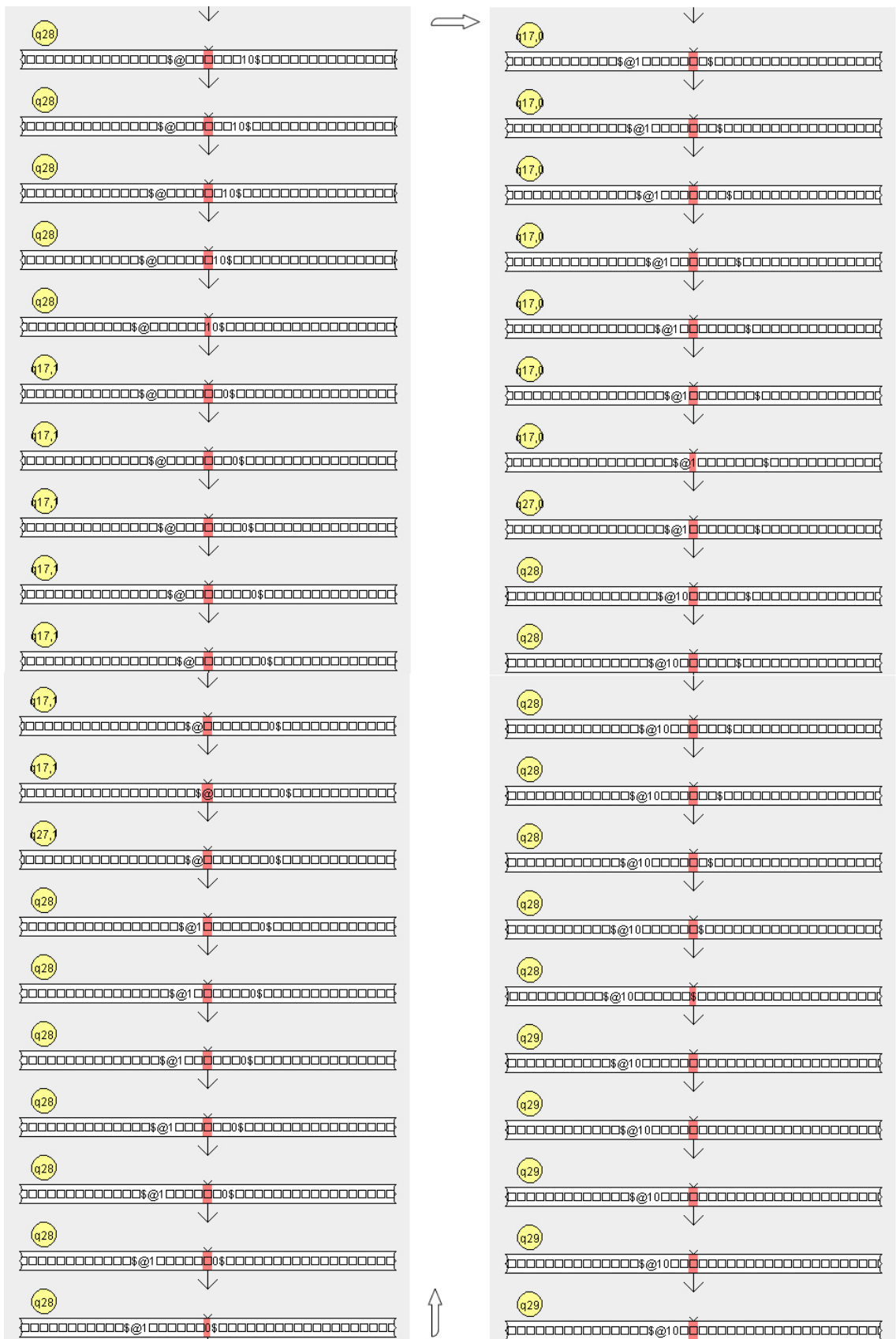


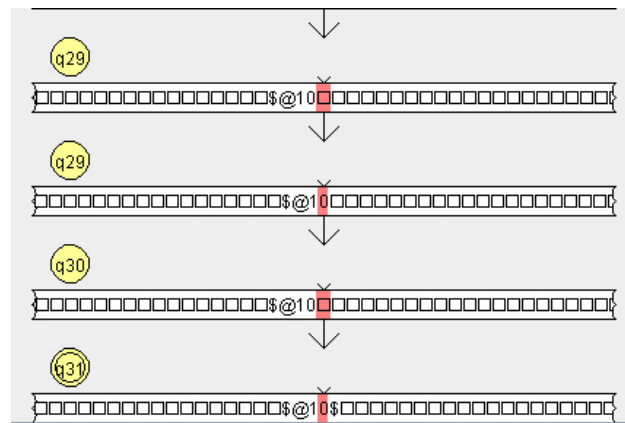
7.6. -2/-2

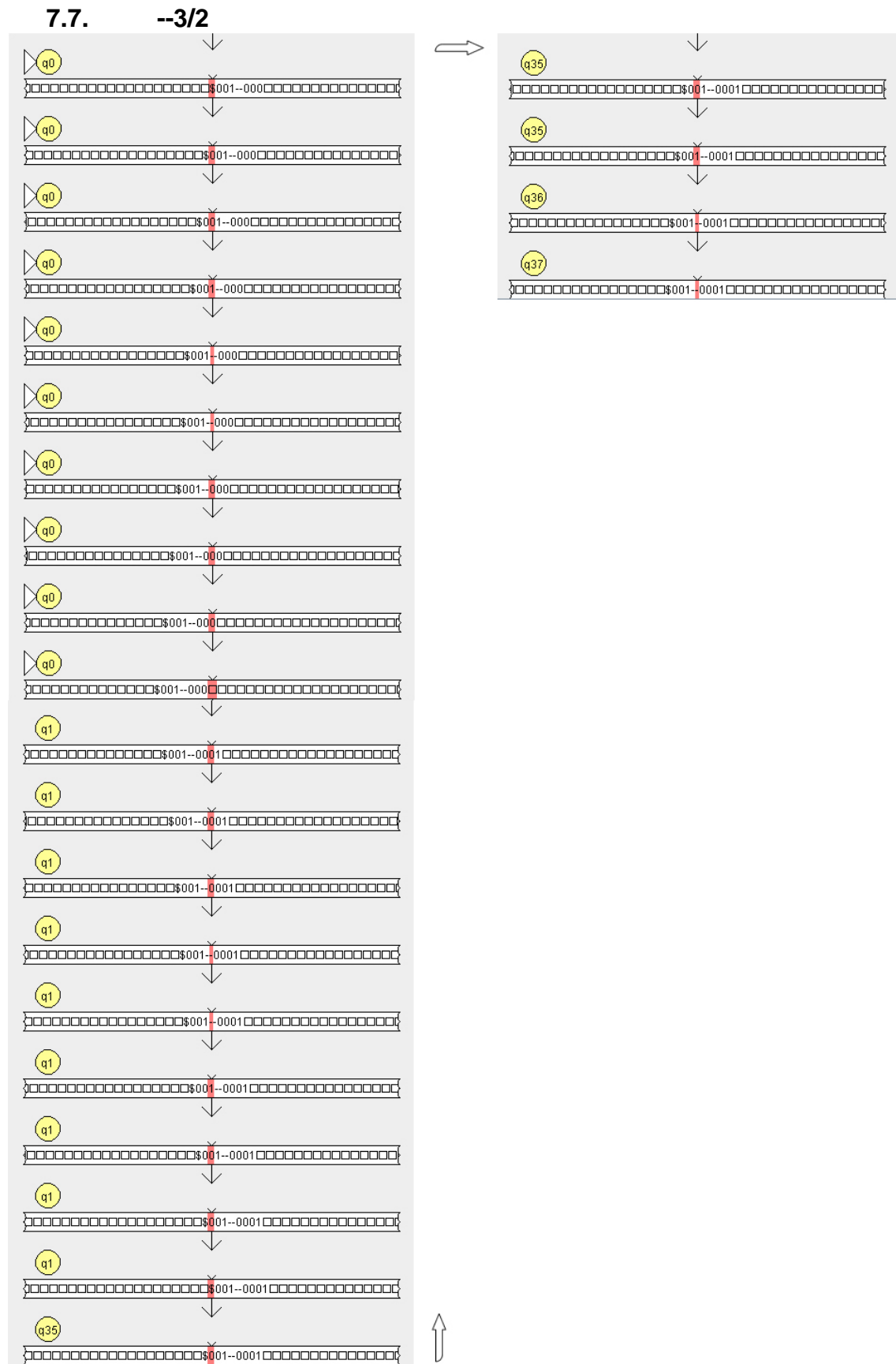












Exemplo com travamento! A entrada está fora da especificação, a máquina rejeita a entrada.

## 8. Outros Resultados

Entrada	Resultado	Resto	Quociente	Cadeia Saída
3/0	Aceito	3	#	\$001#\$
3/2	Aceito	1	1	\$010\$
4/3	Aceito	1	1	\$010\$
3/3	Aceito	0	1	\$@10\$
6/3	Aceito	0	2	\$@100\$
4/2	Aceito	0	2	\$@100\$
10/2	Aceito	0	5	\$@100000
5/0	Aceito	5	#	\$000001#\$
0/4	Aceito	0	0	\$@1@\$
3/4	Aceito	3	0	\$0001@\$
7/8	Aceito	7	0	\$00000001@\$
-2/-2	Aceito	0	1	\$@10\$
-7/0	Aceito	-7	#	\$-00000001#\$
7/0	Aceito	7	#	\$00000001#\$
-7/3	Aceito	-1	-2	\$-01-00\$
-2/3	Aceito	-2	0	\$-001@\$
-5/-3	Aceito	-2	1	\$-0010\$
2/-3	Aceito	2	0	\$001@\$
5/-3	Aceito	2	-1	\$001-0\$
-7/8	Aceito	-7	0	\$-00000001@\$
-4/7	Aceito	-4	0	\$-0001@\$
-5/6	Aceito	-5	0	\$-000001@\$
8/-5	Aceito	3	-1	\$0001-0\$
0/0	Aceito	0	#	\$@1#\$
-0/2	Rejeitado	-	-	Q37
2/-0	Rejeitado	-	-	Q35,-
-2/-0	Rejeitado	-	-	Q35,-
--3/2	Rejeitado	-	-	Q37
-3/--2	Rejeitado	-	-	Q35,-
3/--2	Rejeitado	-	-	Q35,-
--3/--2	Rejeitado	-	-	Q35,-
--4/2	Rejeitado	-	-	Q37
-4/--2	Rejeitado	-	-	Q35,-
--4/--2	Rejeitado	-	-	Q35,-
--5/2	Rejeitado	-	-	Q37
-5/--2	Rejeitado	-	-	Q35,-
5/--2	Rejeitado	-	-	Q35,-
--5/--2	Rejeitado	-	-	Q35,-

Os resultados da tabela anterior foram obtidos através de entrada em Batch. Note-se que as entradas que foram rejeitadas possuem formato inválido, fora da especificação. Para esses valores, ao invés da cadeia de saída, foi representado na tabela o estado de travamento.

## 9. Conclusão

Através dos testes realizados, não foi identificado nenhum caso com comportamento incorreto, ou seja, que produzisse uma saída diferente da prevista, desde que com entradas válidas. Considerando entradas inválidas, a máquina projetada sempre rejeitou a cadeia, o que é um bom sinal, porém não se descarta a possibilidade de que haja alguma cadeia inválida e que seja aceita pela MT projetada. No item 8 verificou-se que esse travamento ocorre relativamente cedo dentro do processamento (na função\_2), o que também é um bom sinal, pois evita um processamento desnecessário com uma cadeia de entrada inválida. Apesar disso, esse travamento poderia ocorrer ainda mais cedo, caso se adicionasse alguma complexidade à função\_1.

Outra possível melhoria, esta de especificação, seria a inclusão do tratamento do sinal positivo '+'. Essa melhoria, entretanto, não daria à máquina maior poder computacional, isso é, o domínio dos problemas que ela é capaz de resolver não seria ampliado.

Uma limitação encontrada nesta implementação refere-se a uma limitação do JFlap. Com entradas que necessitem de mais de 64.000 iterações, ocorre um erro de falta de memória (*java.lang.OutOfMemoryError: Java heap space*). Por isso, a entrada 161/2 é aceita, porém a entrada 162/2 gera esse erro.

A alteração da representação unária suprimindo o símbolo especial '@' para o número zero e utilizando '0', para representar o número zero, '00' para representar o número um, e assim por diante, tornaria a máquina mais simples no sentido de que provavelmente a maioria dos casos envolvendo o símbolo zero pudessem se tornar casos gerais – entretanto o tratamento para retirar o sinal do zero continuaria a existir. Mantida a especificação, essa seria provavelmente a melhoria mais indicada, apesar de também não adicionar poder computacional.

Outras representações, como a binária, poderiam ser benéficas do ponto de vista de reduzir o tamanho da fita de utilizada. Porém, como foi dito, a limitação da implementação atual – atribuída ao JFlap – está relacionada com a quantidade de transições e não com o tamanho da cadeia. Sob esse aspecto, é difícil dizer se haveria ganho, pois não saberíamos estimar se o número de transições seria maior ou menor para se resolver um dado problema com essa nova representação.

Utilizando essa linha de raciocínio, uma forma de aumentar o poder prático dessa máquina seria alterar o algoritmo utilizado para o cálculo da divisão para um que se aproxime mais da forma que se faz essa conta manualmente. Isso provavelmente reduziria o número de transições necessárias para se chegar à solução. Note-se, entretanto, que tal solução muito provavelmente seria acompanhada da mudança da representação unária para binária ou decimal. Além disso, sua complexidade (número de estados e transições) seria provavelmente maior.

A forma de se utilizar os blocos no JFlap possui algumas características que impediram a implementação da conversão da função\_9 como bloco. Isso se deve ao fato de que essa função tem vários estados finais possíveis, (repare que ele seus estados possuem transições para as funções\_3, 4, 5 e 7), e de que a transição entre blocos não está associada a um estado e sim ao bloco todo. Por exemplo: ambos os estados q2 e q4 seriam estados finais nesta função\_9. E cada um deles pode receber o símbolo '@'. No estado q2 este símbolo leva à uma transição para a função\_7 e no estado q4 este símbolo leva à uma transição para a função\_3. Porém, como a transição entre blocos não está ligada ao estado interno do bloco, seria criado um não-determinismo, com o símbolo '@' possuindo duas transições a partir da função\_9. É possível que isso possa ser contornado utilizando-se outra filosofia para separar as funções, mas isso não foi conseguido pelo grupo.

Outra consideração a ser feita é quanto ao posicionamento da cabeça de leitura ao término da computação. O grupo considera a atual implementação consistente, pois ela sempre termina sobre o último símbolo da cadeia de saída anterior ao delimitador '\$'. Entretanto, a tela de resultados em batch do JFlap mostra na coluna *Output* apenas a parte da cadeia que está sob a cabeça de leitura e à sua direita. Por esse motivo, no item 8 não foi colocada a tela do JFlap, que teria a coluna *Output* com a saída "cortada". Uma forma de melhorar isso seria voltar a cabeça de leitura sempre para o início da fita.