

# Exercício de CT-234

Antônio Magno Lima Espescht

21 de maio de 2007

**Exercício:** Prove que  $(n)!$  não pertence a  $O(((n-1)!)!(n-1)^{n!})$ .  
Sugestão: escreva  $(n)!$  na forma de produto, analise os dois lados da desigualdade assumindo que a mesma é válida e encontre uma contradição. A demonstração não é longa. Ainda, sugiro examinar casos pequenos, como o caso 3, 4 e 5 que não são tão pequenos assim pois  $(5)!$  já dá  $120!$ .

## 1 Observação

Não consegui completar o exercício de acordo com a sugestão dada. Porém, desenvolvi a idéia até certo ponto e depois resolvi o exercício usando logaritmos.

## 2 Raciocinando de Acordo com a Sugestão

Vamos considerar  $f(n) = ((n-1)!)!(n-1)^{n!}$  e  $g(n) = (n)!$ .  
Considerando  $n = 3$  temos:

$$f(3) = (2)!\cdot 2^{3!} = 2!\cdot 2^6 = 2\cdot \overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}^{n!=6 \text{ termos}} \quad (1)$$

$$g(3) = (3)! = 6! = \overbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}^{n!=6 \text{ termos}} \quad (2)$$

Considerando  $n = 4$  temos:

$$f(4) = (3)!\cdot 3^{4!} = 6!\cdot 6^{24} = \underbrace{1\cdot 2\cdot \dots\cdot 5\cdot 6}_{(n-1)!=6 \text{ termos}} \cdot \overbrace{6\cdot 6\cdot \dots\cdot 6\cdot 6}^{n!=24 \text{ termos}} \quad (3)$$

$$g(4) = (4)! = 24! = \overbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \dots\cdot 23\cdot 24}^{n!=24 \text{ termos}} \quad (4)$$

Considerando  $n = 5$  temos:

$$f(5) = (4)!\cdot 4^{5!} = 24!\cdot 24^{120} = \underbrace{1\cdot 2\cdot \dots\cdot 23\cdot 24}_{(n-1)!=24 \text{ termos}} \cdot \overbrace{24\cdot 24\cdot \dots\cdot 24\cdot 24}^{n!=120 \text{ termos}} \quad (5)$$

$$g(5) = (5)! = 120! = \overbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \dots\cdot 119\cdot 120}^{n!=120 \text{ termos}} \quad (6)$$

Portanto, de modo geral, temos:

$$f(n) = ((n-1)!(n-1)!)^{n!} \quad (7)$$

$$f(n) = \underbrace{1 * 2 * \dots * (n-1)!}_{(n-1)! \text{ termos}} * \underbrace{(n-1)! * (n-1)! * \dots * (n-1)!}_{n! \text{ termos}} \quad (8)$$

Analogamente, para  $g(n)$  temos:

$$g(n) = (n!)! \quad (9)$$

$$g(n) = \underbrace{1 * 2 * \dots * ((n-1)! - 1) * (n-1)!}_{(n-1)! \text{ termos}} * \overbrace{((n-1)! + 1) * \dots * (n! - 1)}^{n! \text{ termos}} \quad (10)$$

Ou, de forma mais sintética:

$$f(n) = (n-1)!^{n!} \prod_{k=1}^{(n-1)!} k \quad (11)$$

$$g(n) = \prod_{k=1}^{(n-1)!} k \prod_{k=(n-1)!+1}^{n!} k \quad (12)$$

Neste ponto notamos que podemos definir  $h(n) = f(n)/g(n)$  e usar o termo comum  $\prod_{k=1}^{(n-1)!} k$  para simplificar a fração:

$$h(n) = \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{(n-1)!^{n!}}{\prod_{k=(n-1)!+1}^{n!} k} \quad (13)$$

Embora todos os termos do denominador sejam maiores que os termos do numerador, há  $n!$  termos no numerador e apenas  $n! - (n-1)!$  termos no denominador. Podemos ver este efeito com mais detalhes tomando o caso  $n = 4$  como exemplo:

$$h(4) = \frac{\overbrace{6 * 6 * \dots * 6 * 6}^{n!=24 \text{ termos}}}{\underbrace{7 * 8 * \dots * 23 * 24}_{n!-(n-1)!=18 \text{ termos}}} \quad (14)$$

Se dividirmos 18 termos do numerador, todos iguais a 6, pelos 18 termos do denominador, todos maiores que 6, iremos obter um número menor que 1. No entanto, para obter o valor de  $h(4)$ , teríamos que multiplicar este resultado pelos  $24 - 18 = 6$  termos que restaram no numerador (todos iguais a 6) e demonstrar que este produto é menor que 1.

Notamos que no produtório do denominador aparecem os fatores 12, 18 e 24 que são múltiplos de 6.

Quando dividimos um número 6 do numerador por um número múltiplo de 6, no denominador, surgem os fatores 2, 3 e 4 (respectivamente para 12, 18 e 24) no denominador que não são suficientes para cancelar os 6 números 6 do numerador.

Neste ponto, abandonamos a estratégia dada na sugestão.

### 3 Resolvendo o Problema Usando logaritmos

Para provar que  $(n!)!$  não pertence a  $O(((n-1)!)!(n-1)!^{n!})$  iremos provar que  $f(n) = O(g(n))$ .

Se  $f(n) = O(g(n))$  então<sup>1</sup>:

$$\exists c \in R^+, n_0 \in N^* : 0 \leq f(n) \leq cg(n) \quad \forall n \geq n_0 \quad (15)$$

Portanto, queremos provar que, para uma certa constante  $c$  e para valores suficientemente grandes de  $n$ , temos:

$$((n-1)!)!(n-1)!^{n!} \leq c(n!)! \quad (16)$$

Aplicando LOG em ambos os lados da inequação, temos:

$$\ln(((n-1)!)!) + \ln((n-1)!^{n!}) \leq \ln(c) + \ln((n!)!) \leq \ln((n!)!) \quad (17)$$

Para resolver estes logaritmos, vamos usar a aproximação de Stirling:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad (18)$$

Aplicando LOG em ambos os lados da aproximação:

$$\ln(n!) \approx \ln(n^n) - \ln(e^n) + \ln(\sqrt{2\pi}) + \ln(n^{\frac{1}{2}}) \quad (19)$$

Portanto:

$$\ln(n!) \approx n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \ln(\sqrt{2\pi}) \quad (20)$$

Para  $n$  suficientemente grande, o termo  $n \ln(n)$  sobrepõe todos os demais e podemos escrever:

$$\ln(n!) = n \ln(n) \quad (21)$$

A partir desta equação, deduzimos:

$$\ln((n!)!) = n! \ln(n!) = n! n \ln(n) \quad (22)$$

Analogamente:

$$\ln(((n-1)!)!) = (n-1)! \ln(n-1) \quad (23)$$

Sabemos também que:

$$\ln((n-1)!^{n!}) = n! \ln((n-1)!) = n! (n-1) \ln(n-1) \quad (24)$$

Substituindo as equações 22, 23 e 24 na inequação 17, temos:

$$(n-1)! (n-1) \ln(n-1) + n! (n-1) \ln(n-1) \leq n! n \ln(n) \quad (25)$$

Fatorando:

$$(n-1) \ln(n-1) ((n-1)! + n!) \leq n! n \ln(n) \quad (26)$$

---

<sup>1</sup>CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L. e STEIN, C. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press. Cambridge, Massachusetts. 2001. ISBN 0262032937. Sec. 3.1 p. 44

Expandindo o termo  $n!$  no lado esquerdo da inequação:

$$(n-1) \ln(n-1)((n-1)! + n(n-1)!) \leq n!n \ln(n) \quad (27)$$

Colocando o  $(n-1)!$  em evidência:

$$(n-1) \ln(n-1)(n-1)!(1+n) \leq n!n \ln(n) \quad (28)$$

Para  $n$  suficientemente grande,  $(1+n)$  tende para  $n$ :

$$(n-1) \ln(n-1)(n-1)!n \leq n!n \ln(n) \quad (29)$$

Substituindo  $n! = (n-1)!n$  e rearranjando os termos:

$$n!(n-1) \ln(n-1) \leq n!n \ln(n) \quad (30)$$

Dividindo ambos os termos por  $n! > 0$  temos:

$$(n-1) \ln(n-1) \leq n \ln(n) \quad (31)$$

Considerando que  $n-1 < n$ , temos que a inequação acima é válida. Portanto:

$$((n-1)!)!(n-1)!^{n!} = O((n!)!) \quad (32)$$

Q.E.D.